ベイルアウトは経済厚生にいかなる影響を及ぼすか?
――ヨーロピアン・コールオプションを例として――

大　瀧　雅　之

概　　要

ヨーロピアン・コールオプションの売り手・買い手双方の利得関数をもとに，ブラック・ショールズ公式を導出した．そしてこの利得関数に基づくアプローチを適用して，投機失敗時のベイルアウトが事前に読み込まれた場合のオプション価格を計算した．この結果，ベイルアウトが予想に組み込まれることにより投機家は，(i) より大きな利幅を求めてより危険な行動するようになること，(ii) ベイルアウトの資金が投機家以外の市民から税により徴収されるという現実を踏まえたとき，ベイルアウトの実施は確実に社会厚生を低下させることを証明した．

キーワード

コールオプション，ベイルアウト，社会的厚生

Ⅰ．はじめに

本稿では，リーマン・ショックの元凶となったデリバティブズのうち株式オプションを取り上げ，ブラック・ショールズ公式による理論価格が，如何なる市場構造のもとから導出されるのかを，すなわち売り手・買い手双方の期待利得関数を明示的に分析した上で，ゲーム理論的に明らかにする．

このような新しいアプローチには，いくつかの優れた特長がある．第一に利得関数が明示されることで，デリバティブズ全般が一般にそうであるように，コールオプション取引がゼロサムゲームであり，その前提からブラック・ショールズ公式も現れることが明示される．つまりコールオプションの市場価格は，株式などの本源的証券などのように資本の社会的価値を表すものではなく，それから派生した（そこに寄生した）一種の「賭け」の「賭け金」でありそれ自身何の社会的価値を表示するものではないことが，それほどの基

礎知識を要せず，容易に理解できるようになる．

第二には，こうした利得関数に基づくアプローチは，ブラック・ショールズ公式の適用範囲を広げることができるという特性がある．ここでは特に，ベイルアウト（オプション取引という「賭け」に負けた者の金銭的救済策）が期待形成に織り込まれたとき，オプションの性質にいかなる影響が及ぶかを分析する．その結果，ベイルアウトは一種のモラルハザードであり[1]，損失補てんを読みこんだ投機家はより危険な投資戦略をとるようになることが明らかにされる．損失に関して責任をとる必要がないからである．

以上の議論の議論から明らかなように，ベイルアウトはコールオプションという一種の「賭け」（ゼロサムゲーム）は，投機家同士の「賭け金」を膨張させるだけであって，それ自身何ら社会厚生を高めるものではない．さらにベイルアウトの資金が，究極的には「賭け」とは無縁の一般市民の税金によって穴埋めされることを鑑みれば，ベイルアウトは必ず社会厚生を低下させることが証明できるのである．

なお本稿の構成は，以下のとおりである．第Ⅱ節では，簡単にヨーロピアン・コールオプションの商品内容について紹介する．第Ⅲ節ではそれを受けて，売り手・買い手の利得関数の性質を明らかにし，これがブラック・ショールズ公式と矛盾しないことを明らかにする．第Ⅳ節では，ベイルアウト条件付きのヨーロピアン・コールオプションの均衡価格を計算し，同時にその社会厚生上の意義を問うことにする．第Ⅴ節は，結論である．

Ⅱ．ヨーロピアン・コールオプションの構造

コールオプションはある一定の定められた価格（行使価格：exercise price）で株式を売買する権利を取引する（売る権利を取引するものをプットオプション，買う権利のそれをコールオプションとよぶ）金融商品である．このうち，満期 T に定めがあるものをヨーロピアン・コールオプションと呼び，定めのないものをアメリカン・コールオプションという．

ここではその代表選手として，ヨーロピアン・コールオプション（以下単にコールプション）を取り扱うが，他の形式のオプションにも，ここでの考え方は容易に応用できることを，予め断っておく．

1）モラルハザードのもたらす諸問題については，Arrow（1963）を参照のこと．

Ⅲ．コールオプションの性質とブラック・ショールズ公式

1．売り手・借りての利得関数の性質

まず，コールオプションの利得関数の性質について，いくつかの定理を簡単に証明しておこう．S_t は t 時点の株価，P_t は同時点のオプション価格，X は行使価格である。

定理Ⅰ　コールオプションの売り手側（シュタッケルベルグ均衡のリーダー（戦略変数は P_t と X)）の利得 $V^S(t, T)$ と買い手側（シュタッケルベルグ均衡のフォロワー（戦略変数はオプションの行使)）のそれ $V^B(t, T)$ は

$$V^S(t:T) = \min\left[-e^{-r[T-t]}E_t[S_T - X] + P_t, P_t\right], \text{(1)}$$
$$V^B(t:T) = \max\left[e^{-r[\mathrm{T}-\mathrm{t}]}E_t[S_T - X] - P_t, -P_t\right], \text{(2)}$$

として表現される．

まず次の補題が重要である．

補題1　Early exercise は確率 1 で生じない．

証明：$t<t'\leq T$ なる時点区間 t' において，ある確率で early exercise が起きたものとしよう．このとき買い手側の期待収益 $V^B(t,\tau)$ については

$$V^B(t:T) \geq e^{-r[t'-t]}\int_{[S_{t'}-X]e^{-r[t'-t]}>P_t}[S_{t'} - X]d\Phi(S_{t'}\,|\,S_t) - P_t > 0$$

が成立する．一方売り手側の期待収益については

$$V^S(t:T) \leq P_t - e^{-r[t'-t]}\int_{S_{t'}>P_t+X}\left[S_{t'} - \left[P_t + X\right]\right]d\Phi(S_{t'}\,|\,S_t) < 0$$

したがって Early exercise が正の確率で存在するコールオプションは，売り手の期待収益が負となるために，供給されない．（証明終わり）

定理Ⅰの証明：補題1より満期まで必ずオプションは持たれるから，オプションの価格は満期時の期待利得の割引現在価値により，決定されることになる．これで定理Ⅰは証明された．

定理Ⅰのもとで，次の定理が成立する．すなわち，

定理Ⅱ　当該オプションの均衡価格 P_t は，

$$P_t = \max\left[e^{-r[T-t]}E_t\left[S_T - X\right],0\right] \quad (3)$$

によって表わされる．

この定理の証明には，次の補題が有用である．

補題２　$V^B(t:\tau)=V^S(t:\tau)=0$ である．

証明：(1) と (2) を加えわせると明らかなように，

$$V^B(t:\tau)+V^S(t:\tau)=0$$

このとき V^B と V^S のどちらか一方が正であれば，他は負である．すなわち，どちらかの期待利得が正であれば，他のそれは負となり，買い手・売り手のどちらかに取引をするインセンティブが消滅し，市場は成立しない．これで題意は証明された．

定理Ⅱの証明：補題２を (1)，(2) へ代入すると，直ちに (3) が得られる．

２．ブラック・ショールズ公式

次の定理の証明は，伊藤の公式から自明である．

定理Ⅲ　株価 $\{S_\tau\}_{\tau\geq t}$ が，ドリフト付きの伊藤過程

$$\int_t^\tau dS_{t'} = r\int_t^\tau S_{t'}dt' + \sigma\int_t^\tau S_{t'}dW(t',\omega)$$

に従う時，伊藤の公式から株価の対数 $s_{t'}\equiv\ln S_{t'}$ は，次のドリフト付きウィーナー過程に従う．すなわち，

$$\int_t^\tau ds_{t'} \equiv s_\tau - s_t = \int_t^\tau\left[r-\frac{\sigma^2}{2}\right]dt' + \sigma\int_t^\tau dW(t',\omega) \quad (4)$$

である．いいかえれば現在の対数株価 s_t 所与のもとでの満期時対数株価の条件付き確率分布は，$N\left(\left[r-\frac{\sigma^2}{2}\right][T-t],\sigma\sqrt{T-t}\right)$ に従うことが分かる．

ではなぜ対数株価を仮定するのだろうか．こういうきつい仮定に対して無批判であってはならない．じつは (3) の条件付き期待値を解析的に求めるため（二次関数の完全平方形を作る問題に帰着させるため）に，この仮定が必要となるのである．

このことを確かめるために，早速期待値 $\int_X^{+\infty} S_T d\psi(S_T\mid S_t)$ を計算してみよう．ここで ψ は先ほどの正規分布の累積密度関数である，さて実際に計算してみると，

$$\int_X^{+\infty} S_T d\psi(S_T \mid S_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi[T-t]}\sigma}\int_X^{+\infty} \exp\left[s_T - \frac{\left[s_T - s_t - \left[r - \frac{\sigma^2}{2}\right]\left[T-t\right]\right]^2}{2\sigma^2\left[T-t\right]} \right] ds_T$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi[T-t]}\sigma}\int_X^{+\infty} \exp\left[-\frac{\left[s_T - s_t - \left[r + \frac{\sigma^2}{2}\right]\left[T-t\right]\right]^2 - 2s_t\sigma^2\left[T-t\right] - 2r\sigma^2[T-t]^2}{2\sigma^2\left[T-t\right]} \right] ds_T$$

$$= S_t \exp\left[r\left[T-t\right]\right] \times \frac{1}{\sqrt{2\pi[T-t]}\sigma}\int_X^{+\infty} \exp\left[-\frac{\left[s_T - s_t - \left[r + \frac{\sigma^2}{2}\right]\left[T-t\right]\right]^2}{2\sigma^2\left[T-t\right]} \right] ds_T \quad (5)$$

となることが分かる．（5）の右側の項は都合の良いことに，

$$z_T \equiv \frac{s_T - s_t - \left[r + \frac{\sigma^2}{2}\right]\left[T-t\right]}{\sigma\sqrt{T-t}} \qquad (6)$$

とすると，標準正規分布 $N(0,1)$ の密度関数であることが分かる．このように期待値計算が二次関数の計算に帰着させるために，株価の確率過程 (4) に関する仮定が必要となるのである．

ここまで来ると，ブラック・ショールズ公式へはあと一歩である．(3) へ (5) を代入すると，

$$P_t = S_t[\Pr(z_T \geq -z^*)] - X\exp\left[-r[T-t]\right][\Pr(y_T \geq -y^*)] \quad (7)$$

である．ここで（4）と（6）から

$$z^* \equiv \frac{\ln\frac{S_t}{X} + \left[r + \frac{\sigma^2}{2}\right]\left[T-t\right]}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad y^* \equiv \frac{\ln\frac{S_t}{X} + \left[r - \frac{\sigma^2}{2}\right]\left[T-t\right]}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

である．ここで標準正規分布の密度関数の軸対称性から，

$$\Pr(z_T \geq -z^*) = \Pr(z_T \leq z^*),\ \Pr(y_T \geq -y^*) = \Pr(y_T \leq y^*)$$

である．この性質を利用すると（7）は，

$$P_t = S_t \Phi^{SN}(z^*) - X \exp\left[-r\left[T-t\right]\right]\Phi^{SN}(y^*) \qquad (8)$$

と表わすことができる．ここで Φ^{SN} は標準正規分布 $N(0,1)$ の累積密度関数であり，(8) がブラック・ショールズ公式と呼ばれるものである．

Ⅳ．ベイルアウト（金融機関救済）とコールオプション

この節ではベイルアウトがコールオプションで債務を抱えた投資家に施され，それを事前に彼らが読み込んで行動するとしたとき，オプションの価格および経済厚生にいかなる影響が及ぶかを分析する．さてここでは，コールオプションの投機に敗れた投資家には B だけの公的資金の注入がなされるものとしよう．

このとき，コールオプションの買い手・売り手の期待利得は，定理Ⅰを応用することにより，

$$V^B(t:T) = \max\left[e^{-r[T-t]}E_t[S_T - X - B] - P_t,\ Be^{-r[T-t]} - P_t\right] \ (1'),$$

$$V^S(t:T) = \min\left[-e^{-r[T-t]}E_t[S_T + B - X] + P_t,\ P_t\right] \ (2')$$

ここで売り手の競争が激しく，その期待利得が 0 となるように P_t が定まるとすれば，(2') より，オプションの価格は，

$$P_t = \max\left[e^{-r[T-t]}E_t\left[S_T - [\mathrm{X}+\mathrm{B}]\right], 0\right] \qquad (9)$$

となる．

つまり (9) はベイルアウトが，オプションの価格付けに対して次の効果を持つことを表している．すなわち (9) の右辺第一項の [　] 内の右側の項で表現されるものであって，実質的な行使価格が上昇することを意味している．投機に失敗しても失うものが小さくなるため，投資家はより高い株価がついたときのみに権利を行使するようになるのである．

したがって (9) にブラック・ショールズ公式を適用すれば，

定理Ⅳ　ベイルアウトが事前に読み込まれた時のコールオプション価格は，

$$P_t = S_t \Phi^{SN}(z_B^*) - [X+B]\exp\left[-r\left[T-t\right]\right]\Phi^{SN}(y_B^*) \qquad (10)$$

として表わすことができる．ただし，

$$z_B^* \equiv \frac{\ln\frac{S_t}{X+B}+\left[r+\frac{\sigma^2}{2}\right][T-t]}{\sigma\sqrt{T-t}},\ y_B^* \equiv \frac{\ln\frac{S_t}{X+B}+\left[r-\frac{\sigma^2}{2}\right][T-t]}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

である．

ところで，行使価格は（9）から明らかなように，ベイルアウトの額 B だけ上昇する．したがって買い手（売り手）が儲かった時の利幅（コールオプションが行使された時の利幅・行使されなかった時の利幅）は，ベイルアウトの総額分だけ大きくなる．つまりベイルアウトに注ぎ込まれる資金の一部は，ゼロサムゲームの原資となってしまうのである．裏を返して言えば，ベイルアウトが実施されると確信されると，「負けた」ときの損失が局限できるために，ベイルアウトの額だけ「賞金」を上積みできるのである．

ここまで来れば，次の厚生経済学的命題は容易に理解されよう．すなわち，

定理Ⅴ　ベイルアウトの実施は必ず社会的厚生を低下させる．

証明：売り手・買い手双方の利得関数の和は（1'），（2'）から明らかなように $B\Phi^{SN}(y_B^*)$ である．コールオプション取引が行使された場合ゼロサムゲームであることを基礎としている．したがってその原資 B が投機家グループ以外からの税で賄われざるを得ないことを考えれば，ベイルアウトによって，必ず社会的厚生は低下する．

定理Ⅴの意味するところは，極めて深刻である．つまり定理Ⅴは，ベイルアウトの実施が期待形成に読み込まれると，逆に投機家同士のコールオプションと呼ばれる「賭け」に対する態度を大胆にするだけで，「賭け」の負け分を支払う一般市民が損をする構造を経済社会に埋め込むことに等しいことを主張している．つまりベイルアウトは一種のモラルハザードを引き起こす深刻な経済要因であり，金融機関（投機家の組織）の経営規律を著しく弛緩させる作用があるのである．

もちろん俗に言われるように，「潰すには大きすぎる」（too big to fail）という問題があるかもしれない．しかしそれは，問題の所在を不鮮明にする一種の「すり替え」の議論である．厳密には本稿の範囲を越えるが，ベイルアウトを不可避にさせるために，金融機関が意図的に経営規模を拡大している可能性は高く，かつそうした場合，金融機関の肥大化を許してきた金融行政自身の適否自身が本来問われるべきであるからである．

V．結論

本稿では，コールオプションの価格付けを売り手・買い手双方の利得関数を基礎に分析し，オプション市場へのベイルアウトの適用が社会的厚生にいかなる影響を及ぼすかを分析した．

第一に，オプション価格を発見論的に導出した Black and Scholes（1973）に比べ，このようなアプローチには，次の優れた特性がある．すなわち，オプションが本質的にゼロサムゲームの一種の「賭け」であることを明示しながら，ブラック・ショールズ公式を導出できることである．同時に第Ⅳ章で示されたように，こうした確固とした基礎を持つアプローチの採用により，ベイルアウトが読み込まれた際のオプション価格を正確に導出することに成功した．

第二に，ベイルアウトのオプション価格への影響および社会厚生への影響を分析することができた．すなわち，ベイルアウトはオプションの行使価格を実質的に同額だけ上昇させる．これは損失が補填されるために，各投機家が強気となりより多くの利得を求めるからに他ならない．さらにオプションが行使されればゼロサムゲームであることから，ベイルアウトの実施は $[1 - \Phi^{SN}(y_B^*)]B$ だけの社会的費用を不可避的に伴う．したがって，ベイルアウトは必ず社会厚生を低下させるのである．

参考文献

[1]　K. J. Arrow, ‘Uncertainty and the welfare economics of medical care,’ *American Economic Review* Vol. 53 (1963), pp. 941-973.

[2]　F. Black and M. Scholes, ‘The pricing of options and corporate liabilities,’ *Journal of Political Economy*, Vol. 81 (1973), pp. 637-654.