バブルと技術選択

松岡多利思，柴田章久

概　要

本稿では，信用市場の不完全性を考慮した Matsuyama (2007) のモデルにバブル資産を導入することにより，バブルの存在条件を明らかにするとともに，バブルの存在が経済発展に対して及ぼす影響について分析を行う．主要な結果は以下の通りである．(1) バブルのない定常状態における利子率が人口成長率を上回っていたとしても，信用制約が存在するためにバブル資産が正の価格を持つ定常均衡が存在する可能性がある．(2) バブルが存在しなければ，長期的には高い生産性を持つ生産技術が必ず採用され，高所得定常状態を達成できる経済において，バブルが存在する場合には，生産性の高い技術の選択が妨げられ，その結果，経済が低所得均衡に留まってしまう可能性がある．

キーワード

バブル，信用制約，技術選択，世代重複モデル，バブルの罠

Ⅰ．はじめに

チューリップ狂事件や南海泡沫事件等に見られるような，資産価格の急騰（と崩壊）を説明するために，多くの研究がなされてきている．これまでで最も重要な結果は，世代重複モデルを用いた Tirole (1985) による，実質利子率が人口成長率よりも低い場合（動学的に非効率な場合）にのみ，バブル均衡が存在し得るというものであろう[1)]．この結果は，多くの研究によって拡張され，例えば，Weil (1987) や Bertocchi and Wang (1995) は，確率的に崩壊するバブルの存在条件を分析しているし，Grossman and Yanagawa (1993) は，内生成長モデルを用いて，バブルが存在するための条件やバブルの存在が経済成長率に対

1）より早い時期に Samuelson (1958) も同様の結果を得ているが，彼の分析は純粋交換経済を対象としたものであった．

して及ぼす影響を分析している．しかしながら，バブルの研究は 1990 年代の後半にはピークを越し，内生成長とバブルの関係を扱った Futagami and Shibata (2000) や Olivier (2000) 等の研究があるものの，それほど多数の研究がなされているわけではなかった．

ところが，近年においてもバブルの発生と崩壊と見なすことができる現象が繰り返し生じており，例えば，1997 年から翌年にかけてのアジア通貨危機，1994 年から 1995 年のメキシコの通貨危機，2001 年のアルゼンチンの経済危機，2008 年に生じたリーマン・ショックなどを挙げることができる．このような現象を契機として，バブルの研究が再び盛んになされるようになったが，近年のバブルの研究においては，金融市場における摩擦（frictions）の役割に議論の中心が移っている．代表的な研究は，Caballero and Krishnamurthy (2006), Kocherlakota (2009), Farhi and Tirole (2010), Martin and Ventura (2010), Sakuragawa (2010), Miao and Wang (2011) である．彼らは，金融市場における摩擦（借入制約など）が存在するとき，バブルと資本蓄積（景気）の間に正の相関があることを示すモデルを構築している．言い換えれば，バブルの崩壊が経済の停滞をもたらすメカニズムを提示しているのである[2)]．

これらの研究とは異なり，本稿の関心は技術選択にバブルの存在が及ぼす影響にある．そのために，本稿では，金融市場における摩擦に加えて多数のタイプの技術の存在を考慮した Matsuyama (2007) のモデルに，バブル資産を導入し，定常バブル均衡が存在する条件およびバブルの存在が技術選択に及ぼす効果について分析を行う．

本稿の構成は以下の通りである．次節では，Matsuyama (2007) のモデルにバブル資産を導入し，モデルの基本的な設定を説明する．第 3 節においては，市場均衡条件を導き，均衡において，技術選択と利子率がどのように決まるのかを明らかにする．第 4 節はこのモデルの均衡動学を表す差分方程式体系を導出する．第 5 節においては，ベンチマークとして，利用可能な生産技術が一種類しかない場合を分析し，複数の定常バブル均衡が存在し得ることを明らかにする．第 6 節では，二種類の生産技術が利用できる場合を取り上げ，バブルが存在しなければ高い生産性を持つ技術が採用され，高所得定常均衡を実現できる経済において，バブルの存在が高生産性技術の採用を妨げ，経済を低所得均衡に留めてしまう可能性があることを明らかにする．

2）Hirano and Yanagawa (2010) は，バブルと景気の相関は，金融市場の不完全性の度合いに依存して異なり，金融市場の発達度合いが中程度である場合には正の相関が生じ，そうでない場合には負の相関が生じるようなモデルを構築している．

Ⅱ．モデル

ここで用いられるモデルは，Matsuyama (2007) による世代重複モデルである．最終財市場，生産要素市場，信用市場のいずれの市場においても完全競争が成立している．

1．生産

最終財の生産関数は

$$Y_t = AF(K_t, N_t) \tag{1}$$

である．ここで，K_t と N_t は t 期の資本ストックと労働である．また生産関数は規模に関して収穫一定である．(1)の両辺を N_t で割ると

$$y_t = Af(k_t)$$

である．ここで，$y_t = Y_t/N_t$, $k_t = K_t/N_t$ である．以下では，議論を簡単化するために，$f(k_t)$ をコブ・ダグラス型に特定化しよう．

$$f(k_t) = Ak_t^{\alpha}, 0 < \alpha < 1.$$

また，資本の耐用期間は一期間であるとする．

2．企業家と貸手

毎期，測度1の同質な主体が誕生し，二期間（若年期および老年期）生存するものとする．各主体は若年期に一単位の労働を非弾力的に供給し，老年期の消費のみから効用を得る[3)]．各世代の総人口は1であるので，総労働供給も1となる．各主体は，若年期に企業家となって生産活動を行うか，あるいは貸手になって資金供給を行うかを選択することができる．以下では，t 世代で貸手となる主体の比率を θ_t，企業家となる主体の割合 $1-\theta_t$ で表すことにする．

また，この経済には初期に $\overline{B}$ 単位の「バブル資産」が存在しているものとしよう．ここで，バブル資産とは，それ自体は生産にも寄与せず，効用も生み出さない紙きれである．この紙きれのファンダメンタル価格は当然ゼロであるから，均衡において正の価格が付くならば，その資産はバブルであるといえる．

ここで，各主体の行動を見ていくことにしよう．ある主体が貸手になったとすると，信

3）効用関数は消費の増加関数であるので，各主体は老年期における消費を最大にすればよい．

用市場は競争的であるので，市場利子率 r_{t+1} で貸出を行うことができるが，同時にバブル資産を保有することもできる．したがって，貸手の解くべき問題は

$$\max_{s_t,\, b_t} c^l_{t+1} = r_{t+1} l_t + \frac{p_t}{p_{t+1}} b_t$$

$$\text{s.t. } w_t = l_t + b_t \qquad (2)$$

と表される．ここで，l_t，b_t と p_t とはそれぞれ，貸出量，バブル資産の実質残高，バブル資産の価格である．もし，均衡において，バブル資産が保有されているならば，当然，貸出とバブル資産保有間の無裁定条件：

$$r_{t+1} = \frac{p_t}{p_{t+1}} \qquad (3)$$

が成立しなければならない．

次に，企業家の問題を考えよう．この経済には二つのタイプの投資技術（投資プロジェクト）が存在しており，企業家はそのいずれかを選択することができる．タイプ1のプロジェクトに m_1 の最終財を投入すると，次期の初めに $m_1 R_1$ 単位の資本財を得ることができる．それに対し，タイプ2のプロジェクトは m_2 単位の最終財を $m_2 R_2$ 単位の資本財に変換することができる．ただし，$m_i > w_t$ であるなら，企業家は $m_i - w_t$ だけの資金を借りる必要があることに注意しなければならない．もし，これだけの資金を借りることができたならば，老年期における企業家の消費水準は

$$c^e_{t+1} = \rho_{t+1} m_i R_i - r_{t+1}(m_i - w_t),$$

で表される．ここで，ρ_{t+1} は資本の収益率である．右辺の第一項はタイプ i の投資プロジェクトからの収益であり，第二項は借入の返済額を表している．しかしながら，この経済では信用市場が不完全であるため，老年期の収入の一部しか担保として利用できず，$\lambda_i \rho_{t+1} m_i R_i$ までしか借入できない．ここで，λ_i はタイプ i のプロジェクトの信用制約の度合を表し，$0 \leq \lambda_i \leq 1$ である．この信用制約を式で表すと

$$\lambda_i \rho_{t+1} m_i R_i \geq r_{t+1}(m_i - w_t) \text{ for } i = 1 \text{ and } 2 \qquad (4)$$

となる．

ここで，企業家は貸手になることも選択可能であるので，投資プロジェクトからの収益は貸手の収益を上回らなければならないということに注意が必要である．すなわち，

$$c^e_{t+1} \geq c^l_{t+1} \Leftrightarrow \rho_{t+1} R_i \geq r_{t+1} \qquad (5)$$

となっていなければならないのである．この条件を利潤条件と呼ぶ．以上より，企業家の効用最大化問題は

$$\max c^e_{t+1} = \rho_{t+1} m_i R_i - r_{t+1}(m_i - w_t)$$

$$\text{s.t.} \quad (4) \text{ and } (5)$$

と表すことができる.

Ⅲ. 市場均衡条件

1. 利子率と技術選択

生産要素市場は競争的であるので，最終財生産企業の利潤最大化条件より

$$\rho_t = Af'(k_t) = \alpha A k_t^{\alpha-1}, \tag{6}$$

$$w_t = (1-\alpha)Ak_t^{\alpha}. \tag{7}$$

が成り立つ．さて，信用制約を表す(4)式と利潤条件(5)より，均衡利子率は以下の条件を満たさなければならない.

$$r_{t+1} \leq \min\left\{R_i\rho_{t+1},\ \frac{\lambda_i R_i \rho_{t+1}}{1-\frac{w_t}{m_i}}\right\} = \min\left\{R_i f'(k_{t+1}),\ \frac{\lambda_i R_i A f'(k_{t+1})}{1-\frac{w_t}{m_i}}\right\}$$

$$= \frac{R_i A f'(k_{t+1})}{\max\{1,\ (1-\frac{w_t}{m_i})/\lambda_i\}} \equiv \phi_{t+1}^i$$

ここで，Matsuyama (2007) の議論に従って，均衡利子率と技術選択は

$$r_{t+1} = \max\{\phi_{t+1}^1,\ \phi_{t+1}^2\}$$

によって決まることを示すことができる（詳しくは補論 1 を参照のこと）．また，このことから，結局のところ，

$$\frac{R_i}{\max\{1,\ (1-\frac{w_t}{m_i})/\lambda_i\}},\ \text{for } i = 1, 2 \tag{8}$$

の大小関係によって，どのタイプのプロジェクトが選択されるのかも決まることがわかる．さらに，タイプ i のプロジェクトが選択され，信用制約がバインドしているときの利子率は $Af'(k_{t+1})R_i\lambda_i/(1-w_t/m_i)$ であり，タイプ i のプロジェクトが選択され，信用制約がバインドしていないときの利子率は $Af'(k_{t+1})R_i$ となることもわかる.

さて，この論文では，議論を簡単化するために以下の仮定をおく.

仮定 1　　$(1-\alpha)AR_i^{\alpha} < m_i^{1-\alpha}$ for $i = 1, 2$

仮定 2　　$\lambda_1 R_1 \geq \lambda_2 R_2$, $R_2 \geq R_1$ and $m_2 \geq m_1$

仮定 1 は，企業化が投資プロジェクトに必要な資金を，賃金のみで自己調達できる状況を排除するための条件である．また，このモデルにおいては，プロジェクトのタイプに関して λ_1, λ_2, R_1, R_2, m_1, m_2 というパラ―メタが存在しているため，Matsuyama (2007) が示している様に，様々な状況が生じ得る．そのため，本論文においては，仮定 2 を置き，考

察する対象を生産性と担保性との間にトレード・オフがある状況に限定する．これは，先端的な技術は生産性は高いが，プロジェクトの内容が外部から観察できないため担保性は低い一方で，現在普及しプロジェクトの内容が外部から観察できる技術については生産性は低くとも担保性は高いと考えてのことである．なお，仮定２は自動的に $\lambda_1 \geq \lambda_2$ を意味することにも注意されたい．

さて，仮定２の下では，(8)を表す二本の軌跡を図１の様に描くことができる（図１は，仮定２の条件が全て厳密な不等式で与えられている場合を描いている．この図についての詳細な説明については補論２を見よ）．図１から $0 < w_t < w_C$ であるならばタイプ１のプロジェクトが採用され，$w_C \leq w_t$ であるならば，タイプ２のプロジェクトが採用されることがわかる．ここで w_C はタイプ１と他タイプ２の(8)の値が一致するような賃金であり，

$$w_C = m_2\left(1 - \frac{R_2}{R_1}\lambda_2\right) \tag{9}$$

で与えられる．ここで，仮定２と(9)から

$$\overline{w}_1 \equiv (1-\lambda_1)m_1 < w_C \equiv m_2\left(1 - \frac{R_2}{R_1}\lambda_2\right) < (1-\lambda_2)m_2 \equiv \overline{w}_2.$$

となっていることも容易に確認できる．したがって，$w_t < (1-\lambda_1)m_1(\equiv \overline{w}_1)$ もしくは $w_C < w_t < (1-\lambda_2)m_2(\equiv \overline{w}_2)$ であるならば，信用制約がバインドしており，$\overline{w}_1 \leq w_t < w_C$ もしくは $\overline{w}_2 \leq w_t$ であるときは，信用制約はバインドしていないことがわかる．

２．資産市場均衡条件

この経済に存在している資産は，実物資本とバブル資産の二種類である．バブル資産の

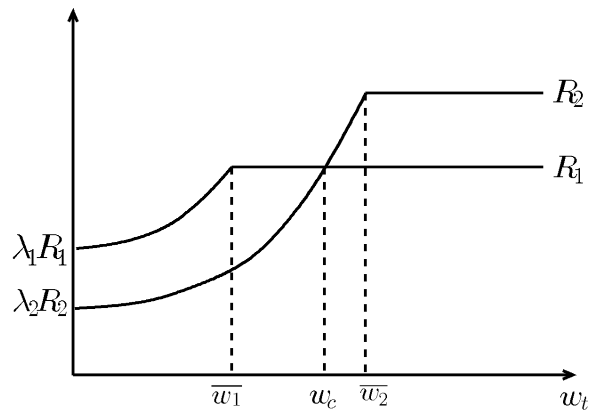

図１

供給量は $\overline{B}$ で固定されている．資産を保有するのは貸手のみであるため，バブル資産の需給均衡条件は

$$\overline{B} = \theta_t B_t \tag{10}$$

となる．ここで，B_t は１人の貸手によって保有されているバブル資産の名目量である．バブル資産の価格は p であるので，(10)を実質値で書き直すと

$$\frac{\overline{B}}{p_t} = \theta_t b_t \ (\equiv \theta_t \frac{B_t}{p_t}). \tag{11}$$

となる．

次に資本市場均衡条件を考えよう．企業家の賃金所得および借入額は全て投資に用いられるので，総投資に投入される最終財は

$$(1-\theta_t)w_t + \theta_t(w_t - b_t) = w_t - \theta_t b_t$$

で与えられる．既にみたように，$0 < w_t < w_C$ である場合には，タイプ１のプロジェクトが選択され，m_1 単位の最終財投入が m_1R_1 単位の資本を生み出し（1単位の最終財投入で測れば R_1 単位の資本が生み出される），$w_C \leq w_t$ であるときには，m_2 単位当たりの最終財投入から m_2R_2 単位の資本が生み出されるので，経済全体の資本蓄積は

$$k_{t+1} = \begin{cases} R_1(w_t - \theta_t b_t) \text{ if } 0 < w_t < w_C \\ R_2(w_t - \theta_t b_t) \text{ if } w_C \leq w_t \end{cases} \tag{12}$$

によって決定されることになる．

最後に，信用市場均衡条件を考える．信用市場均衡条件は，単純に次式で与えられる．

$$\theta_t l_t = (1-\theta_t)(m_i - w_t). \tag{13}$$

(13)式の左辺は総貸出量であり，右辺は総借入需要量である．

３．均衡利子率

(3)式と図１より，均衡金利は

$$\frac{p_t}{p_{t+1}} = r_{t+1} = \begin{cases} \dfrac{\lambda_1 m_1 R_1 A f'(k_{t+1})}{m_1 - w_t} & \text{if } 0 \leq w_t < m_1(1-\lambda_1) \\ R_1 A f'(k_{t+1}) & \text{if } m_1(1-\lambda_1) \leq w_t < w_C \\ \dfrac{\lambda_2 m_2 R_2 A f'(k_{t+1})}{m_2 - w_t} & \text{if } w_C \leq w_t < m_2(1-\lambda_2) \\ R_2 A f'(k_{t+1}) & \text{if } m_2(1-\lambda_2) \leq w_t \leq 1 \end{cases} \tag{14}$$

を満たす．また，(10)と(11)から

$$\frac{\overline{B}}{p_{t+1}} = \theta_{t+1}\frac{B_{t+1}}{p_{t+1}} \Leftrightarrow \frac{p_t}{p_{t+1}}\frac{\overline{B}}{p_t} = \theta_{t+1}\frac{B_{t+1}}{p_{t+1}} \Leftrightarrow r_{t+1}\theta_t b_t = \theta_{t+1}b_{t+1}, \tag{15}$$

となるが，この式はバブルの変動を表している．さらに，(2)と(13)を(12)に代入すると

$$k_{t+1} = \begin{cases} R_1 m_1(1-\theta_t) \text{ if } 0 < w_t < w_C \\ R_2 m_2(1-\theta_t) \text{ if } w_C \leq w_t \end{cases} \tag{16}$$

となり，資本蓄積と企業家・貸手比率の関係式が得られる[4)].

Ⅳ．均衡動学

ここで，新たな変数を導入しよう．すなわち

$$\gamma_t \equiv \frac{\theta_t b_t}{w_t}$$

と定義する．この γ_t を用いることによって，このモデルの均衡動学を二次元の動学で表すことが可能になる．(2)と(13)から

$$(1-\theta_t)m_i = (1-\gamma_t)w_t$$

となるので，これを(16)に代入すると

$$k_{t+1} = \begin{cases} R_1(1-\gamma_t)w_t \text{ if } 0 < w_t < w_C \\ R_2(1-\gamma_t)w_t \text{ if } w_C \leq w_t \end{cases} \tag{17}$$

となる．さらに(15)と γ_t の定義から

$$\gamma_{t+1} = \frac{\theta_{t+1}b_{t+1}}{w_{t+1}} = \frac{r_{t+1}\theta_t b_t}{w_{t+1}} = \frac{w_t}{w_{t+1}} r_{t+1}\gamma_t$$

となるので，この関係と $w_{t+1} = (1-\alpha)Ak_{t+1}^{\alpha}$ と(14)から

$$\gamma_{t+1} = \begin{cases} \dfrac{w_t}{w_{t+1}}\gamma_t \dfrac{\lambda_1 m_1 R_1 A f'(k_{t+1})}{m_1 - w_t} & \text{if } 0 \leq w_t < m_1(1-\lambda_1) \\[2ex] \dfrac{w_t}{w_{t+1}}\gamma_t R_1 A f'(k_{t+1}) & \text{if } m_1(1-\lambda_1) \leq w_t < w_C \\[2ex] \dfrac{w_t}{w_{t+1}}\gamma_t \dfrac{\lambda_2 m_2 R_2 A f'(k_{t+1})}{m_2 - w_t} & \text{if } w_C \leq w_t < m_2(1-\lambda_2) \\[2ex] \dfrac{w_t}{w_{t+1}}\gamma_t R_2 A f'(k_{t+1}) & \text{if } m_2(1-\lambda_2) \leq w_t \leq 1 \end{cases}$$

4) (7)式から明らかなように，w_t は資本 k_t の単調減少関数であるので，$w_t = w(k_t)$ と表すことができる．このため，(16)の二つのレジームを k を用いて表すことも可能である．

$$
= \begin{cases} \dfrac{\alpha}{1-\alpha}\,\dfrac{\gamma_t}{1-\gamma_t}\,\dfrac{m_1\lambda_1}{m_1-w_t} & \text{if } 0 \leq w_t < m_1(1-\lambda_1) \\[2ex] \dfrac{\alpha}{1-\alpha}\,\dfrac{\gamma_t}{1-\gamma_t} & \text{if } m_1(1-\lambda_1) \leq w_t < w_C \\[2ex] \dfrac{\alpha}{1-\alpha}\,\dfrac{\gamma_t}{1-\gamma_t}\,\dfrac{m_2\lambda_2}{m_2-w_t} & \text{if } w_C \leq w_t < m_2(1-\lambda_2) \\[2ex] \dfrac{\alpha}{1-\alpha}\,\dfrac{\gamma_t}{1-\gamma_t} & \text{if } m_2(1-\lambda_2) \leq w_t \leq 1 \end{cases} \tag{18}
$$

を得ることができるが，これは γ と w の一階の差分方程式になっている．

ここで，$w_{t+1}=(1-\alpha)Ak_{t+1}^{\alpha}$ から k_{t+1} を w_{t+1} について明示的に解き，それを(17)に代入して整理すると

$$
w_{t+1} = \begin{cases} (1-\alpha)A[R_1(1-\gamma_t)w_t]^{\alpha} & \text{if } 0 < w_t < w_C \\ (1-\alpha)A[R_2(1-\gamma_t)w_t]^{\alpha} & \text{if } w_C \leq w_t \end{cases} \tag{19}
$$

となり，γ と w の一階の差分方程式に帰着される．以上のことから，(18)と(19)は γ と w についての一階の非線形差分方程式体系であり，これらを満たす $\{\gamma_t, w_t\}$ の流列がこの経済の均衡を与えることになる．

V．単一技術の場合

本節では，先ず，モデルの基本的性質を確認するために，一つのタイプの技術しか存在しない場合を取り上げ，バブルの存在条件や性質について分析を行うことにしょう．具体的には仮定 2 を次の仮定に置き換えることにする．

仮定 2'　$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda, R_2 = R_1 = R, m_2 = m_1 = 1$

このとき，(18)と(19)は

$$
\gamma_{t+1} = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{1-\alpha}\,\dfrac{\gamma_t}{1-\gamma_t}\,\dfrac{\lambda}{1-w_t} & \text{if } 0 \leq w_t < 1-\lambda \\ \dfrac{\alpha}{1-\alpha}\,\dfrac{\gamma_t}{1-\gamma_t} & \text{if } 1-\lambda \leq w_t \leq 1 \end{cases} \tag{20}
$$

$$
w_{t+1} = (1-\alpha)A[R(1-\gamma_t)w_t]^{\alpha} \tag{21}
$$

のように簡単化される．

1．位相図

(20)と(21)から，$w_{t+1} = w_t$ を表す軌跡は

$$\gamma_t = 1-\left[\frac{w_t^{1-\alpha}}{(1-\alpha)AR^{\alpha}}\right]^{\frac{1}{\alpha}} \tag{22}$$

となる．この軌跡の形状は α が 1/2 より大きいか小さいかで変化するが，右下がりであることが確認できる（補論 3 を参照）．一方，$\gamma_{t+1} = \gamma_t$ を表す軌跡は

$$\gamma_{t+1} = \begin{cases} 1-\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{\lambda}{1-w_t} & \text{if } 0 \le w_t < 1-\lambda \\ \frac{1-2\alpha}{1-\alpha} & \text{if } 1-\lambda \le w_t \le 1 \end{cases} \tag{23}$$

となる[5]．

さて，図 2 に $w_{t+1}=w_t$ を表す軌跡を，図 3 に $\gamma_{t+1}=\gamma_t$ を表す軌跡をそれぞれ描こう（図 2 と 3 では $\alpha < 1/2$ を仮定している）．ここで，γ と w の時間を通じた変化の方向は

$$w_{t+1} \ge \mathrm{w}_t \text{ if } \gamma_t \le 1-\left[\frac{w_t^{1-\alpha}}{(1-\alpha)AR^{\alpha}}\right]^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$\gamma_{t+1} \ge \gamma_t \text{ if } \gamma_t \ge \begin{cases} 1-\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{\lambda}{1-w_t} & \text{if } 0 \le w_t < 1-\lambda \\ \frac{1-2\alpha}{1-\alpha} & \text{if } 1-\lambda \le w_t \le 1 \end{cases}$$

であるので，これらの方向を図 2 と 3 に矢印で書き込んである．これらの図 2 と図 3 を組み合わせることにより，このモデルの均衡動学を分析することができるが，多くのパラメータを含んでいるため，多様な結果が生じ得る．そのため，ここでは典型的な場合のみを取り上げることにしたい．

先ず，$\alpha < 1/2$ の場合を見よう．このとき，もちろん $(1-2\alpha)/(1-\alpha)$ は正の値をとるので，$\gamma_{t+1}=\gamma_t$ を表す軌跡(23)は水平な部分を含むことになる．このとき λ, α および R の値に応じて，図 4 − 図 6 に描かれたように三つの場合が考えられる．図 4 においては軌跡 $w_{t+1}=w_t$ が，$\gamma_{t+1}=\gamma_t$ の水平部分を上から切っており，唯一つのバブル定常均衡が $\gamma_{t+1}=\gamma_t$ の水平部分上に存在している．図 5 は信用制約がバインドしている定常バブル均衡が一つだけ存在する場合を表している．また，図 6 は α が 1/2 よりは小さいものの 1/2 に近い値をとり，λ が極端に大きくも小さくもない場合である．図 6 においては，$w_{t+1}=w_t$ を表す軌跡と $\gamma_{t+1}=\gamma_t$ を表す軌跡は，$\gamma_{t+1}=\gamma_t$ が右下がりの領域（信用制約がバインドしている領域）で二つの交点を持ち，$\gamma_{t+1}=\gamma_t$ が水平の部分で一つの交点を持つ．この場合，三つのバブル定常均衡が存在している．

5）$\gamma_t = 0$ も $\gamma_{t+1} = \gamma_t$ を意味することに注意されたい．

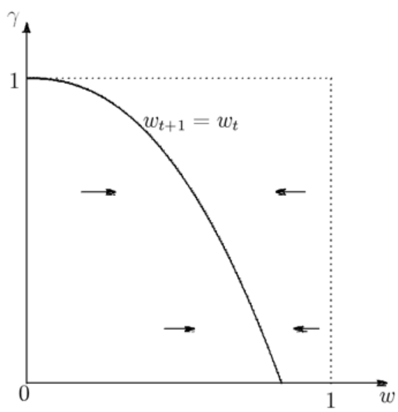

図２

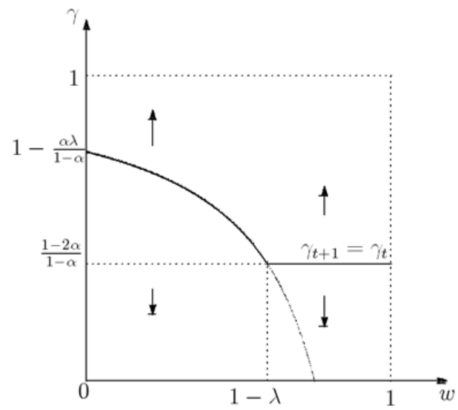

図３

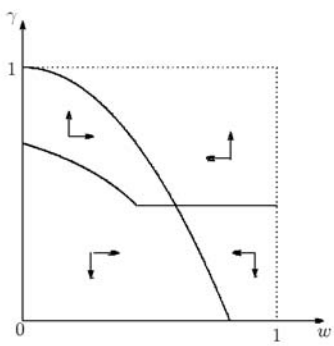

図４

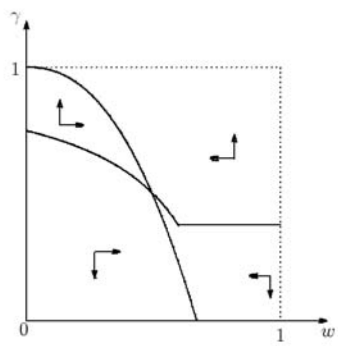

図５

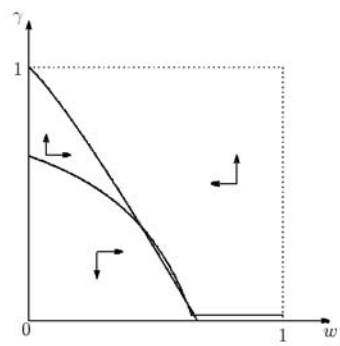

図６

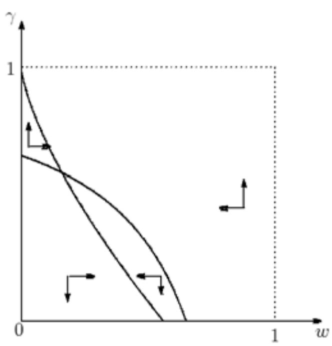

図７

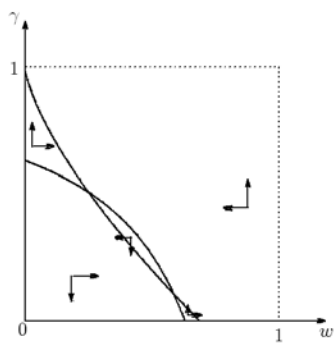

図８

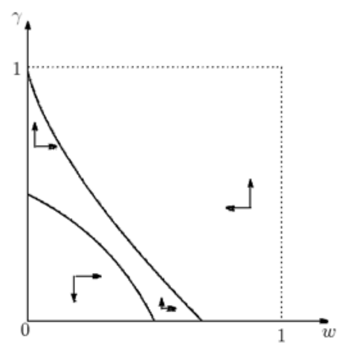

図９

次に，$\alpha \geq 1/2$ である場合を考えよう．このとき，補論３で示されている通り，$w_{t+1} = w_t$ の二階微分は非正であり，軌跡 $\gamma_{t+1} = \gamma_t$ は第１象限において水平な部分を持たない．したがって，図７－図９に描かれたような形状になる．定常バブル均衡は，図７では一つ存在し，図８では二つ存在するが，図９では一つも存在しない．また，定常バブル均衡が

存在する場合，そこでは信用制約が常にバインドしている．

２．定常均衡

以上の準備に基づいて，定常均衡を導こう．先ず，このモデルには，バブル資産が価値を持たない均衡が常に存在していることに注意されたい．すなわち，

$$\gamma^* = 0,$$

$$w^* = [(1-\alpha)AR^{\alpha}]^{\frac{1}{1-\alpha}}, \tag{24}$$

という定常均衡である（右肩の＊はバブルのない定常均衡を表す）．また，このとき

$$k^* = [(1-\alpha)AR^{\alpha}]^{\frac{1}{1-\alpha}}, \tag{25}$$

である．

次に，定常バブル均衡を導出するが，その前にベンチマークとして，信用制約がない状況下の「定常黄金律均衡」（黄金律に対応する定常均衡）を導出しておこう．我々は，資本の耐用期間を一期間と仮定しているので，黄金律は，粗利子率が1，すなわち $r^{GR} = R\rho = 1$ で与えられる．この関係式より，k^{GR} を

$$k^{GR} = (\alpha AR)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

と求めることができる．また，この定常状態における賃金は

$$w^{GR} = [A\alpha^{\alpha}(1-\alpha)^{1-\alpha}R^{\alpha}]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

である．ここで，(25)式から，$\alpha < 1/2$ のときは，$k^{GR} < k^*$ であるので，バブルのない定常均衡の粗利子率は1を下回り（人口成長率＞利子率），$\alpha > 1/2$ のときは，$k^{GR} > k^*$ であるので，バブルのない定常均衡における粗利子率は1より高い（人口成長率＜利子率）ことがわかる．なお，Tirole (1985) においては，人口成長率が利子率を上回る場合にのみ定常バブル均衡が存在し得たことに注意を促しておきたい．

さて，我々のモデルにおける定常バブル均衡を導出しよう．最初に考察の対象とするのは，信用制約がバインドしていない定常バブル均衡である．(22)と(23)より，ただちに

$$\gamma = \frac{1-2\alpha}{1-\alpha}, \tag{26}$$

$$w^{GR} = [A\alpha^{\alpha}(1-\alpha)^{1-\alpha}R^{\alpha}]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

であることがわかる．(24)より明らかなように，この定常状態は $\alpha < 1/2$ である場合のみ存在し，資本ストックの水準は黄金律定常均衡に等しい．すなわち，$k^{GR} = (\alpha AR)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ である．この定常均衡を定常黄金律バブル均衡と呼ぼう．これは，Tirole (1985) の導いた定常バブル均衡と本質的に同じものである．

しかしながら，このモデルにおいては，他のタイプの定常バブル均衡も存在している．

この定常バブル均衡は，以下の二式を同時に満たす (γ^{**}, w**) の組み合わせによって与えられる．

$$\gamma^{**} = 1 - \frac{\lambda\alpha}{1-\alpha}\frac{1}{1-w^{**}}, \quad w = w^{**}$$

ここで w^{**} は，

$$(1-w)^{\alpha}w^{1-\alpha} = \lambda^{\alpha}\alpha^{\alpha}(1-\alpha)^{1-\alpha}R^{\alpha}.$$

を満たす賃金である．このタイプの定常バブル均衡においては信用制約がバインドしていることに注意されたい．したがって，これを定常信用制約バブル均衡と呼ぶことにしよう[6]．また，信用制約を考慮していない Tirole (1985) においては，定常バブル均衡は，バブルのない定常均衡が動学的に非効率（人口成長率＞利子率，すなわち $\alpha < 1/2$）である場合のみに存在し得たが，定常信用制約バブル均衡は，実質利子率と人口成長率の大小にかかわらず存在し得ることも強調に値する．これは，信用制約の存在のため，収益性の高いプロジェクトの一部が実施できず，資金の効率的な運用先が実現しないため，資金がバブル資産へ振り向けられてしまうことによって生じている．すなわち，信用市場の不完全性はバブルの存在する可能性を高めるのである．Abel 他（1989）の動学的効率性に関する実証研究によれば，日本，米国，英国，フランス，ドイツ，イタリアは動学的に効率的であった．したがって，Tirole（1985）のモデルではバブルの存在は説明できないことになるが，我々のモデルでは，動学的に効率的な経済においても定常バブル均衡は存在し得るため，バブル均衡の存在を Abel 他の実証結果と整合的な形で説明することができるのである．

なお，ここで見たそれぞれの定常均衡が，緩やかな条件の下で存在することを示すのは容易である[7]．

Ⅵ．二種類の技術が存在する場合

では，二種類のタイプのプロジェクトが利用可能である場合には，どのようなことが生じるのであろうか．この点を見るために，仮定 2 を

6）Kunieda (2008) および Martin and Ventura (2010) は，経済主体の異質性を考慮に入れた世代重複モデルに信用制約を導入し，類似のバブル均衡を導出している．

7）詳しくは，Matsuoka and Shibata (2011) を参照されたい．また，同論文では，このモデルの安定性についての分析も行っている．また，Gokan (2011) は，我々のモデルにおける技術が単一な場合と類似したモデルを用いて，均衡の動学的性質を詳細に検討している．

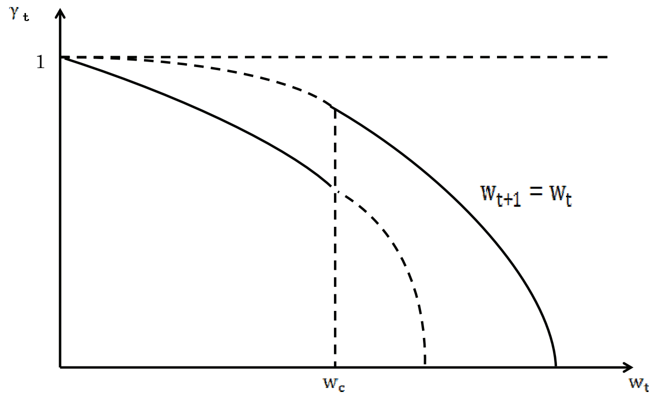

図 10

仮定 2"　　$\lambda_1 R_1 > \lambda_2 R_2, R_2 > R_1, m_2 \geq m_1.$

に置き換えよう．このとき，どちらの技術が採用されるのかは，これまで通り，図 1 によって決定される．もし賃金が $0 < w_t < w_C$ の範囲に入っているならば，タイプ 2 の技術が選択される．w_{t+1} は(19)式より決まり，この式から $w_{t+1} = w_t$ を表す軌跡を，図 10 のように描くことができる．ここで，$w_t = w_C$ となる点で，選択される技術がタイプ 1 からより生産性の高いタイプ 2 に変わるため（$R_2 > R_1$），$w_{t+1} = w_t$ を表す軌跡はこの点で上方にジャンプすることに注意されたい．

ここで，バブルがない定常均衡について簡単に見ておこう．バブルが存在しない場合は，$\gamma = 0$ で表されるので，このモデルの動学は

$$w_{t+1} = \begin{cases} (1-\alpha)A(R_1 w_t)^\alpha & \text{if } 0 < w_t < w_C \\ (1-\alpha)A(R_2 w_t)^\alpha & \text{if } \quad w_C \leq w_t \end{cases}$$

によって描写されることになる．これは Matsuyama (2007) によって分析された場合とまったく同一であるので，パラメータの値に応じて，複数の定常均衡が存在する場合もあれば，唯一の定常均衡が存在する場合もある[8)]．複数の定常状態が存在するのは，信用市場の不完全性の度合いがある程度深刻な場合であり，これは，初期の賃金水準が低い（初期資本が小さい）場合には，信用性制約が存在するために十分な投資がなされず，より生産性の高いタイプ 2 を採用することができないまま定常状態に至ってしまうが，初期の賃金水準がある程度以上に高いならば，信用制約はそれほど大きな影響を持たず，タイプ 2

8）定常状態が存在せず，永久に変動し続ける場合もあり得る．この点については，Matsuyama (2007) および Asano, Kunieda and Shibata (2011) を参照のこと．

のプロジェクトを実施することができ，その結果より所得の高い定常均衡を実現することができるためである．Matsuyama (2007) は前者の場合を，信用市場の不完全性による低所得均衡であるので，信用の罠（credit trap）と呼んでいる．

しかしながら，以下の分析では，生産性パラメータ A が十分大きく，タイプ 2 の技術が選択される定常均衡しか存在しない場合に分析を限りたい．すなわち，

$$m_2\left(1-\frac{R_2}{R_1}\lambda_2\right)<[(1-\alpha)A]^{\frac{1}{1-\alpha}}R_1^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \tag{27}$$

と仮定する．この条件下では，長期的には必ずタイプ 2 の技術が選択され，信用の罠は生じない．

では，複数の技術が利用可能である場合の定常バブル均衡について分析しよう．そのために，$\gamma_{t+1}=\gamma_t$ の軌跡がどのような形状になるのかを確認しておこう．仮定 2” の下では，(18) より

$$\gamma_t=\begin{cases}1-\dfrac{\alpha}{1-\alpha}\dfrac{\lambda_1 m_1}{m_1-w_t} & \text{if } 0\leq w_t<m_1(1-\lambda_1)\\[2ex] \dfrac{1-2\alpha}{1-\alpha} & \text{if } m_1(1-\lambda_1)\leq w_t<w_C\\[2ex] 1-\dfrac{\alpha}{1-\alpha}\dfrac{\lambda_2 m_2}{m_2-w_t} & \text{if } w_C\leq w_t<m_2(1-\lambda_2)\\[2ex] \dfrac{1-2\alpha}{1-\alpha} & \text{if } m_2(1-\lambda_2)\leq w_t\leq 1\end{cases}$$

となるので，$\gamma_{t+1}=\gamma_t$ を表す軌跡は，やはり $w_t=w_C$ となる点で上方にジャンプすることがわかる．これを描いたのが図 11 である．

図 12 は，以上の二つの軌跡を同時に描いている．この図に描かれている状況は

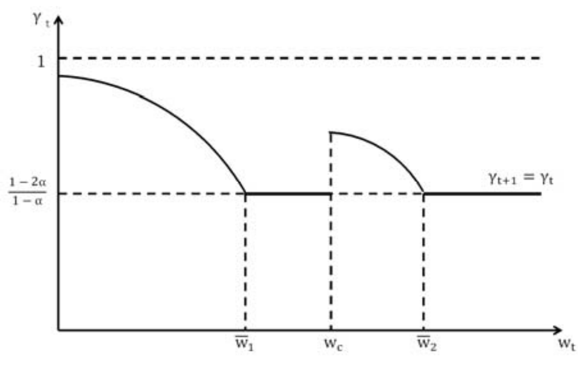

図 11

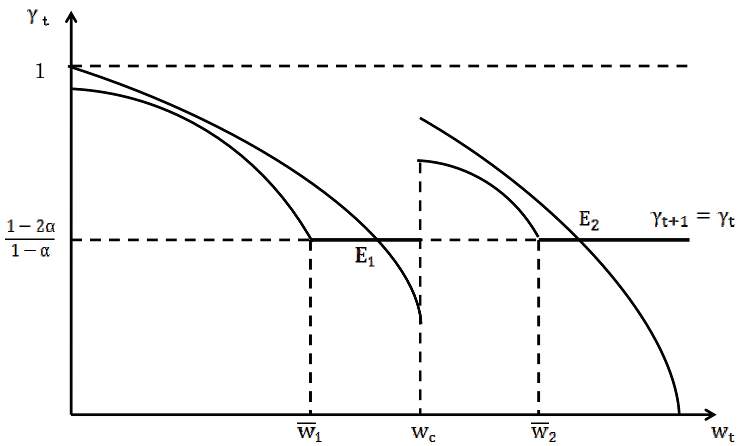

図 12

$$(1-\lambda_1)m_1 < (R_1\alpha)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}(1-\alpha)A^{\frac{1}{1-\alpha}} < m_2\left(1-\frac{R_2\lambda_2}{R_1}\right),$$

$$(1-\lambda_2)m_2 < (R_2\alpha)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}(1-\alpha)A^{\frac{1}{1-\alpha}} \qquad (28)$$

二つの条件が同時に満たされている場合であり，以下では(27)に加えて(28)が成立している場合のみを考えることとする[9)]．このとき，タイプ 1 の技術が採用されているレジームとタイプ 2 の技術が採用されているレジームのいずれのレジームにおいても，$w_{t+1} = w_t$ 曲線は，$\gamma_{t+1} = \gamma_t$ 曲線の水平な部分と必ず交点を持つ．ただし，$\gamma_{t+1} = \gamma_t$ 曲線の右下がりの部分でも交わる場合もあり得る[10)]．したがって，(28)が成立するとき，この経済には二つ以上の定常バブル均衡が存在することが分かる．

E_1 においては，技術はタイプ 1 にとどまっており，その結果，賃金も低い水準にとどまっている．現在の設定の下では，バブルが存在しなければ，長期的には必ずタイプ 2 の技術が選択されるのであるから，E_1 は，バブルの存在が，生産性の高い技術の採用を妨げていることを意味している．すなわち，バブルの存在が，本来利用されるはずであった技術の採用を阻害し，経済を長期的に低所得均衡に陥らせてしまうのである．これを我々は「バブルの罠」と呼ぶ．これに対し，E_2 においては，タイプ 2 の技術が採用されており，バブルの存在が技術選択を阻害しているわけではないが，賃金水準自体は低下しており，Tirole (1985) と同様に，バブルが資本蓄積を阻害していることが分かる．

9）仮定 2”，(27)，(28)を同時に満たすパラメータの組み合わせが存在することは容易に確認できる．例えば，$R_1 = 2$, $R_2 = 3.1$, $\lambda_1 = 0.6$, $\lambda_2 = 0, 3$, $A = 1$, $\alpha = 0.45$, $m_1 = m_2 = 1$.

10）それぞれのレジームにおける二本の曲線の関係は，一つのタイプの技術しか存在していない前節のものと基本的に同一であるため，前節の議論をほぼそのままの形で適用することができる．

Ⅶ．結論

本稿では，信用市場の不完全性を考慮した Matsuyama (2007) のモデルにバブル資産を導入することにより，バブルの存在条件を明らかにするとともに，バブルが経済発展に対して及ぼす影響について分析を行った．その結果，信用制約の存在はバブルが存在する可能性を大きく広げることと，バブルの存在が生産性の高い技術の選択を妨げ，その結果，経済を低位均衡に留めてしまう可能性（バブルの罠に陥ってしまう可能性）があることを示した．

補論 1

先ず，タイプ 1 とタイプ 2 のプロジェクトのどちらか一方について

$$r_{t+1} < \phi^i_{t+1}$$

であると仮定しよう．この時，信用制約(4)も利潤条件(5)もバインドしてないので，全ての主体は企業家になることを選択し，タイプ i のプロジェクトに投資しようとする．したがって，貸手になることを選択する主体は存在しておらず，信用市場においては必ず超過需要が存在する．このため，利子率は上昇しなければならず，信用市場が均衡するためには，

$$r_{t+1} \geq \phi^i_{t+1} \text{ for } i = 1, 2 \Leftrightarrow r_{t+1} \geq \max\{\phi^1_{t+1}, \phi^2_{t+1}\}$$

とならなければならない．次に，

$$r_{t+1} \geq \max\{\phi^1_{t+1}, \phi^2_{t+1}\}$$

であるとしよう．この時，信用制約(4)と利潤条件(5)のうちの少なくとも一つはバインドしており，どの主体も投資を実行することができない．したがって，

$$r_{t+1} \leq \max\{\phi^1_{t+1}, \phi^2_{t+1}\}$$

でなければならない．以上のことから，均衡においては

$$r_{t+1} = \max\{\phi^1_{t+1}, \phi^2_{t+1}\} = \max\left\{ \frac{R_1 Af'(k_{t+1})}{\max\{1, (1-\frac{w_t}{m_1})/\lambda_1\}}, \frac{R_2 Af'(k_{t+1})}{\max\{1, (1-\frac{w_t}{m_2})/\lambda_2\}} \right\}$$

$$= Af'(k_{t+1})\max\left\{ \frac{R_1}{\max\{1, (1-\frac{w_t}{m_1})/\lambda_1\}}, \frac{R_2}{\max\{1, (1-\frac{w_t}{m_2})/\lambda_2\}} \right\}$$

が成り立つことがわかる．また，この式から，

$$\frac{R_i}{\max\{1, (1-\frac{w_t}{m_i})/\lambda_i\}}, \text{ for } i = 1, 2 \tag{8}$$

の大小関係によって，どのタイプのプロジェクトが選択されるのかも決まることがわかる．

補論２

$\lambda_1 R_1 \geq \lambda_2 R_2$ であるので，(8)より，賃金がゼロに近いときにはタイプ１のプロジェクトが採用されることになる．このとき信用制約はバインドしているが，その水準から賃金が上昇し，$w_t = \overline{w}_1 \equiv (1-\lambda_1)m_1$ の水準になったとき，信用制約は丁度バインドしなくなり，$R_1 / \max\{1, (1-\frac{w_t}{m_1})/\lambda_1\} = R_1$ となる．この賃金水準において，タイプ２の(8)の値を評価すると，

$$\frac{\lambda_2 R_2}{(1-\frac{(1-\lambda_1)m_1}{m_2})}$$

となるので，タイプ１とタイプ２の(8)の値の差は

$$R_1 - \frac{\lambda_2 R_2}{(1-\frac{(1-\lambda_1)m_1}{m_2})} = \frac{1}{1-(1-\lambda_1)\frac{m_1}{m_2}}\left[R_1 - R_1(1-\lambda_1)\frac{m_1}{m_2} - \lambda_2 R_2\right]$$

であることがわかる．ここで，

$$J\left(\frac{m_1}{m_2}\right) \equiv R_1 - R_1(1-\lambda_1)\frac{m_1}{m_2} - \lambda_2 R_2$$

と定義すると $J' < 0$ であり，$J(1) = \lambda_1 R_1 - \lambda_2 R_2 > 0$ である．今，仮定２から $m_1/m_2 < 1$ であるので，

$$J\left(\frac{m_1}{m_2}\right) > 0.$$

となり，したがって，

$$R_1 > \frac{\lambda_2 R_2}{(1-\frac{(1-\lambda_1)m_1}{m_2})}$$

となることがわかる．これはまさしく図１に描かれている状況である．

補論３

$w_{t+1} = w_t$ を表す軌跡の形状を調べるために(22)を微分すると

$$\left.\frac{d\gamma_{t+1}}{dw_t}\right|_{w_{t+1}=w_t} = -[(1-\alpha)AR_i^{\alpha}]^{\frac{1}{1-\alpha}}(1-\gamma_t)^{\frac{2\alpha-1}{1-\alpha}} < 0,$$

となる．もう一度微分すると

$$\left.\frac{d^2\gamma_{t+1}}{dw_t^2}\right|_{w_{t+1}=w_t} = \frac{1-2\alpha}{1-\alpha}[(1-\alpha)AR_i^{\alpha}]^{\frac{1}{1-\alpha}}(1-\gamma_t)^{\frac{2\alpha-1}{1-\alpha}-1}$$

となるので，

$$sign\left.\frac{d^2\gamma_{t+1}}{dw_t^2}\right|_{w_{t+1}=w_t} = sign(1-2\alpha)$$

となることがわかる．

References

Asano, T., T. Kunieda, and A. Shibata (2011), "Complex behavior in a piecewise linear dynamic macroeconomic model with endogenous discontinuity," forthcoming in *Journal of Difference Equations and Applications*.

Abel, A., G. Mankiw, L. Summers, and R. Zeckhauser (1989), "Assessing dynamic efficiency: theory and evidence," *Review of Economic Studies* 56, 1-19.

Bertocchi, G. and Y. Wang, "The real value of money under endogenous beliefs," *Journal of Economic Theory* 67, 205-222.

Caballero, R. J. and A. Krishnamurthy (2006), "Bubbles and capital flow volatility: causes and risk management, Journal of Monetary Economics 53, 35-53.

Farhi, E. and J. Tirole (2010), "Bubbly liquidity," mimeo, Harvard University.

Gokan, Y. (2011), "Poverty traps, the money growth rule, and the stage of financial development," Ritsumeikan University Working Paper.

Grossman, G. and N. Yanagawa (1993), "Asset bubbles and endogenous growth," *Journal of Monetary Economics* 31, 3-19.

Futagami, K. and A. Shibata (2000), "Growth effects of bubbles in an endogenous growth model," *The Japanese Economic Review* 51, 221-235.

Hirano, T. and N. Yanagawa (2010), "Asset bubbles, endogenous growth, and financial frictions," mimeo, University of Tokyo.

Kocherlakota, N. (2009), "Bursting bubbles: consequences and cures," University of Minnesota.

Kunieda, T. (2008), "Asset bubbles and borrowing constraints," *Journal of Mathematical Economics* 44, 112-131.

Martin, A. and J. Ventura (2010), "Economic growth with bubbles," NBER Working Paper 15870.

Matsuoka, T. and A. Shibata (2011), "Credit market imperfections, asset bubbles and technology choice," mimeo.

Matsuyama, K. (2007), "Credit traps and credit cycles," *American Economic Review* 97, 503-516.

Miao, J. and P. Wang (2011), "Bubbles and credit constraints," mimeo.

Sakuragawa, M. (2010), "Bubble cycles," mimeo.

Samuelson, P. (1958), "An exact consumption-loan model of interest with or without the social contrivance of money," *Journal of Political Economy* 66, 467-482.

Tirole, J. (1985), "Asset bubbles and overlapping generations," *Econometrica* 53, 1071-1100.

Weil, P. (1987), "Confidence and the real value of money in overlapping generation models," *Quarterly Journal of Economics* 102, 1-22.