ナイト流不確実性と実質賃金の硬直性

玉　井　義　浩

概　　要

Azariadis (1975) は不完全雇用の原因となる実質賃金の硬直性の理論的根拠の一つとして，リスク中立的な企業がリスク回避的な勤労者に対し所得変動のリスクを除去する保険としての硬直的賃金を提示している．Azariadis のモデルが完全情報を前提としているのに対し，本研究は勤労者の行動が勤労者の私的情報であり，完全な保険の提供が不可能な非対称情報下でのプリンシパル・エージェント問題（PA 問題）の枠組みにおいても実質賃金の硬直性が生じうることを示す．

もし勤労者がいわゆるナイト流の不確実性に直面し，その選好が Savage (1954) の公理を満たさない場合，「起こりうる最高の成果以外の成果についてはその多寡に関わらず報酬を一定額に固定されるような」賃金契約が，仮に企業が勤労者の行動（努力）を観察できないような非対称情報下であっても，PA 問題の解としての最適なインセンティヴ・スキームとなりうる．もし勤労者の選好が期待効用関数で表現できず，Nishimura and Ozaki (2006) で公理化されているような，ε-contamination と呼ばれる複数の確率分布からなる集合についての Maximin の期待効用（MMEU）で表現される場合，勤労者は最善の成果と最悪の成果の間の乖離で表現されるようなリスクよりも寧ろ，最悪の状態が平均的な状態から離れて大きく落ち込むことを深刻視する．こうした勤労者はリスクプレミアムよりも寧ろ，「不確実性」プレミアムと称すべきプレミアム，すなわち，所得の変動によって生じる「最悪の状態が平均から大きく乖離すること」の厚生損失の補償を要求する．このような勤労者と対峙する企業にとっては，勤労者にインセンティヴを与える方法として，最高位の成果に対して大きく報い，それ以外の成果については報酬を一定額に固定するという方法が，勤労者に与えるプレミアムの総額を節約する観点から望ましくなる．

キーワード

ナイト流不確実性，実質賃金硬直性，不確実性プレミアム，リスクプレミアム，プリンシパル＝エージェント問題

Ⅰ．序

Azariadis (1975) は不完全雇用均衡を生む実質賃金の硬直性の理論的根拠の一つとして，リスク中立的な企業が所得変動を嫌うリスク回避的な勤労者に対して提供する，保険としての硬直的賃金を示した．このような暗黙の契約に基づく賃金硬直性についての理論研究はその後，Grossman and Hart (1981), Azariadis and Stiglitz (1983), Chari (1983,1989) などによって非対称情報下の分析に発展した．これら一連の研究は，企業の生産性ショックが企業（雇用主）側の私的情報であるという仮定に基づく．勤労者側が生産性ショックを観察できない場合，生産性ショックに強く連動した賃金契約は企業が生産性ショックを偽って賃下げを行うモラルハザードを惹起するものとして勤労者に信認されず，外生的なショックに対する調整は賃金ではなく雇用量によって行われるようになる．

一方，Azariadis (1975) のアイディアを，勤労者側の努力（企業の生産性ショックではなく）が企業に観察不能なプリンシパル・エージェント問題（PA 問題）に援用するのは困難である．勤労者側にモラルハザードが生じうる場合，企業が完全な保険を提供するのは不可能で，企業は勤労者により高い努力の提供を促すためには成果の変化に条件づけて賃金も変動するような賃金スキームを示さざるを得ないからである．

本論文は，これとは対照的に，勤労者の努力が企業に観察できない場合であっても，下方に硬直的な賃金スキームが生じうることを示す．通常の PA 問題では勤労者の努力が必ずしも高い成果をもたらさないものの，その確率が上昇するという仮定が置かれ，その確率分布が既知のものとして扱われる．しかし，現実の生産現場では勤労者は努力と成功確率との間に存在するであろう確率的関係に 100% の確信を抱き得ない場合もありうる．このように，経済主体が変数の実現値のみならず確率分布そのものについて完全な確信を抱けないという不確実性は，これをリスク（実現値は未知だが確率分布は既知）と峻別した Frank Knight に因んで「ナイト流不確実性（Knightian Uncertainty）」または「ambiguity」と呼ばれる．Knight 流の不確実性に直面する経済主体は不確実な変数を支配する確率分布そのものについて確信がもてず，単一の確率分布に依拠せず複数の確率分布からなる集合について慎重に利得を判断すると考えられる．特に勤労者が上に示したような，努力と成果との間の確率的関係に確信を抱けないような Knight 流不確実性に直面する場合，単純な成果連動型の変動給が非対称情報下での最適な契約となるとは限らない．

Gilboa and Schmeidler (1989) は Knight 流の不確実性に直面した経済主体の選好として，単一の確率分布についての期待効用関数ではなく，複数の確率分布からなる集合についての Maximin の期待効用（MMEU）で表現されるものについての公理を与えた．これは，

籤（Lottery）についての選好順序を比較する際，複数の確率分布からなる集合のうち最も期待効用が低くなるような確率分布を選んで籤の利得を評価する，というもので，単一の確率分布についての選好順序が問題となる von Neumann=Morgenstern 型の期待効用関数によって表現される選好順序と異なり，籤ごとに期待効用の最小値を与える別の確率分布を用いることを許容する.

Karni (2009) は PA 問題の当事者の選好が MMEU で表現できる場合の，当事者の選好が満たす公理を与えている．本稿は Karni (2009) で議論された PA 問題の一つの類型について，エージェント（勤労者）側が用いる確率分布の集合を，Nishimura and Ozaki (2006) によって公理が与えられている ε-contamination に特定化した場合に，最適なインセンティヴ・スキームがどのようになるかを分析したものである．典型的な PA 問題に於いては尤度比単調増加の仮定が置かれ，勤労者のより高い努力の傾注が，より高い成果をおさめる確率を上げることが仮定されるが，もし勤労者がこの尤度比単調増加について $(1-\varepsilon)$ の度合いでしか確信を抱けず，残りの ε の度合いについてあらゆる確率分布を想定し MMEU を考慮する場合，勤労者は最善の効用と最悪の効用の乖離より，最悪の事態における効用が期待効用をどれだけ下回って乖離するか，に留意する．このような勤労者（エージェント）にとって，最善の効用と最悪の効用の乖離で生じる効用の損失は軽微であり，寧ろ最悪の状態が実現した場合の効用が期待効用を下回ることによって発生する厚生損失が重大となる．このような厚生損失を補償するため，企業には勤労者へ払う賃金の確実性等価に，リスクプレミアムとは異なる，“不確実性”プレミアムと称すべきプレミアムを上乗せする必要が生じる．これを節約しつつ勤労者から努力のインセンティヴを引き出す方法としては，最高位の成果以外の成果については固定賃金を払い，最高位の成果にのみ賃金を上乗せするような形態の賃金契約が最適となりうる.

論文の構成は以下のとおりである．第 2 節では Knight 流不確実性に勤労者が直面している場合のプリンシパル・エージェントモデルが提示される．第 3 節で最適賃金契約についての補題と命題が提示され，第 4 節で結論を述べる.

Ⅱ．勤労者が Knight 流不確実性に直面する場合の プリンシパル・エージェント問題

ここでは単一の企業（プリンシパル）と単一の勤労者（エージェント）の間の賃金契約を分析する．勤労者はある水準の努力をある課題について提供し，その努力が「成果」を生み出しその価値を企業と勤労者が分け合う．成果の価値はスカラー値 x で評価され，$X \equiv$

$\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ の n 種類の値を取り得，$x_1 < x_2 < ... < x_n$ とする．企業は賃金契約を勤労者に提示し，勤労者はその契約を受け容れるか拒絶するかを決める．企業の提示する賃金契約を拒絶しても，勤労者は外部に効用 $\underline{u}$ を得るオプションをもっている．もし勤労者が企業の提案を受け容れるなら，勤労者が努力を提供し，X の中の一つの要素 $x_i \in X$ が実現する．勤労者が選択する努力水準を a で表す．成果 x_i は観察可能かつ立証可能である一方で，勤労者が選択する a は勤労者の私的情報であり，観察不能で立証も不能である．そこで賃金契約は努力水準 a に条件付けることはできず，もっぱら成果の実現値 x_i に条件づけたものとなる．w_i を，成果 x_i に対する賃金報酬とする．

勤労者が選ぶことのできる努力水準の集合は有限で 2 とおりの値 $\{a_0, a_1\}$ しかとらない．努力 a_j を提供するため，勤労者は効用の単位にして $c(a_j)$ の費用を負担する．$c(a_0) < c(a_1)$ と仮定する．企業は X 上の確率分布が勤労者が選択する努力水準 a に依存すると考えている．勤労者が努力 a_j を選択した場合に成果 x_i が実現する確率を $p_i(a_j)$ $(i \in \{1, ..., n\}, j \in \{0, 1\})$ で表すことにする．いずれの $a_j \in \{a_0, a_1\}$ についても，$\sum_{i=1}^{n} p_i(a_j) = 1$ である．この確率分布関数について，以下を仮定する．

仮定 1.　$p_i(a_j) > 0 \ \forall i \in \{1, ..., n\}, j \in \{0, 1\}$.

仮定 2.　**（尤度比単調増加の条件）**π_i を $\pi_i \equiv \frac{p_i(a_1) - p_i(a_0)}{p_i(a_1)}$ と定義する．π_i は i について強い意味で単調増加である（$\pi_1 < \pi_2 < \cdots < \pi_n$）.

企業はリスク中立的で，かつ，勤労者が a_j を供給した場合の確率分布が $p_i(a_j)$ であることに何らの疑いも抱いておらず，Knight 流の不確実性に直面していないとする．つまり企業の賃金契約 $\mathbf{w} = (w_1, ..., w_n)$ と勤労者が選択する努力 a_j に関する選好は，企業の取り分の期待値 $\sum_{i=1}^{n} (x_i - w_i) p_i(a_j)$ で表現できる．

1．不確実性回避的な勤労者の選好

一方，勤労者は不確実性回避的かつ，リスク中立的乃至回避的な選好をもつ．つまり，勤労者は $(1-\varepsilon) \times 100\%$ の度合いで成果の集合 X 上の確率分布が努力水準 a_j を選んだ場合には $(p_1(a_j), p_2(a_j), ..., p_n(a_j)) (\equiv p(a_j))$ となると確信しているものの，$\varepsilon \times 100\%$ の見込みで，この考え方が完全に誤っていて，真の確率分布について実は完全に無知であるという可能性も考慮し，最悪のシナリオを考慮する．たとえば a_0 ではなく a_1 を選んだとしても，それが高い成果 x_i を得る確率を上げることに貢献しない可能性や，寧ろその確率を下げる方向に作用する可能性も考慮する．勤労者は企業から提示された $\mathbf{w}$ に対して a_j を選ぶ場合の選好を，単一の分布 $\mathbf{p}(a_j)$ による期待効用で評価するのではなく，以下のような，「$\mathbf{p}(a_j)$ についての ε-contamination」と呼ばれる，確率分布の集合 $\mathbf{p}^{\varepsilon}(a_j)$ についての maximin の期

待効用（MMEU）で評価する．「$\mathbf{p}(a_j)$ についての ε-contamination」とは，以下のように定義される．

$$\mathbf{p}^{\varepsilon}(a_j) \equiv \{(1-\varepsilon)\mathbf{p}(a_j) + \varepsilon\mathbf{q} | \mathbf{q} \in Q\}$$

ここで Q は X 上のありとあらゆる確率分布の集合を意味する．

関数 $u(w_i)$ を，勤労者が成果 x_i に対応する賃金として w_i を得た場合に得ることのできる効用の尺度とする．$u' > 0$ かつ $u'' \leq 0$ を仮定する．すると，勤労者の，努力水準 a_j を選択した場合の $\mathbf{p}^{\varepsilon}(a_j)$ についての MMEU は，

$$\min_{\mathbf{p} \in \mathbf{p}^{\varepsilon}(a_j)} \sum_{i \in I} u(w_i)p_i - c(a_j)$$

となる．（I は添え字の集合 $\{1, \ldots, n\}$）

このような MMEU によって表現される選好をもつ勤労者は，努力 a_1，a_0 を取った場合の期待効用の比較を a_1 については $\mathbf{p}(a_1)$ の ε-contamination の中から最小の期待効用を与える分布，a_0 については $\mathbf{p}(a_0)$ の ε-contamination の中から最小の期待効用を与える分布を選んで行う．具体的には，勤労者はある賃金契約 $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_n)$ について

$$\min_{\mathbf{p} \in \mathbf{p}^{\varepsilon}(a_1)} \sum_{i \in I} u(w_i)p_i - c(a_1) \geqq \min_{\mathbf{p}' \in \mathbf{p}^{\varepsilon}(a_0)} \sum_{i \in I} u(w_i)p'_i - c(a_0) \tag{1}$$

となって初めて努力 a_1 を提供するようになる[1)]．

（1）に於いて集合 $\mathbf{p}^{\varepsilon}(a_1)$, $\mathbf{p}^{\varepsilon}(a_0)$ の要素がそれぞれ単一の分布 $\mathbf{p}(a_1)$, $\mathbf{p}(a_0)$ である場合（すなわち $\varepsilon = 0$ の場合）は，従来型の PA 問題に帰着する．（1）の定式化の特徴は，契約 $\mathbf{w}$ の形状によっては左辺と右辺で勤労者が選ぶ確率分布が互いに尤度比単調増加の関係にはないものとなる可能性があること，また，賃金契約の形状が変われば，左辺と右辺それぞれに於いて勤労者が採用する確率も変化しうる点にある．たとえば，勤労者が選ぶそれぞれの努力水準 a_j について，$\mathbf{p}^{\varepsilon}(a_j)$ についての MMEU は，

$$\begin{aligned} &\min_{\mathbf{p} \in \mathbf{p}^{\varepsilon}(a_j)} \sum_{i \in I} u(w_i)p_i - c(a_j) \\ &= \min_{\mathbf{q} \in Q} \sum_{i \in I} u(w_i)[(1-\varepsilon)p_i(a_j) + \varepsilon q_i] - c(a_j) \\ &= (1-\varepsilon)\sum_{i \in I} u(w_i)p_i(a_j) + \varepsilon \min_{\mathbf{q} \in Q} \sum_{i \in I} u(w_i)q_i - c(a_j) \end{aligned}$$

である．最初の等号は ε-contamination の定義から，また 2 番目の等号は積分の線形性から従う．

1）Karni (2009) は Agent の選好順序が（1）のような形で表されるような場合の PA 問題についての公理を与えている．

最終行の第２項は $\mathbf{p}(a_j)$ と合成する分布 $\mathbf{q}$ として $u(w_i)$ の最小値（勤労者にとっての最悪の効用）に確率１を付与する分布を選んだ場合に最小となるから，結局，

$$\min_{\mathbf{p}\in\mathbf{p}^{\varepsilon}(a_1)}\sum_{i\in I}u(w_i)p_i = (1-\varepsilon)\sum_{i\in I}u(w_i)p_i(a_j) + \varepsilon u(w_{\min}(\mathbf{w}))$$

となる（$w_{\min}(\mathbf{w}) \equiv \min\{w_1, \ldots, w_n\}$）．

このパラメータ ε が大きいほど，勤労者が直面する Knight 流不確実性が深刻で，勤労者の不確実性回避の度合いが強まると理解できる．

企業と勤労者の選好は，ε の値も含め，企業と勤労者の双方にとって既知であるとする．既に述べたとおり勤労者は外部に $\underline{u}$ の効用を得る機会をもっているので，企業の最適化問題は，

$$\max_{a,\mathbf{w}}\sum_{i\in I}(x_i-w_i)p_i(a) \tag{2}$$

$$s.t.$$

参加制約（IR）：　$(1-\varepsilon)\sum_{i\in I}u(w_i)p_i(a)+\varepsilon u(w_{\min}(\mathbf{w}))-c(a)\geq\underline{u}$

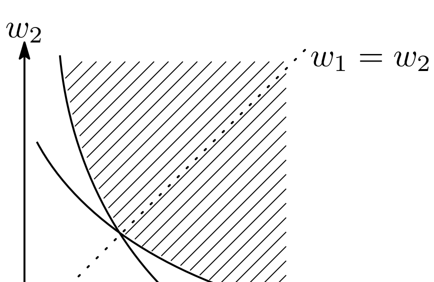
誘因整合性制約（IC）：　$(1-\varepsilon)\sum_{i\in I}u(w_i)p_i(a)+\varepsilon u(w_{\min}(\mathbf{w}))-c(a)$

$$\geq(1-\varepsilon)\sum_{i\in I}u(w_i)p_i(a')+\varepsilon u(w_{\min}(\mathbf{w}))-c(a')\ \forall\ a'\neq a$$

と表すことができる．

勤労者が Knight 流の不確実性に直面する場合の PA 問題に特有の特徴は，企業が示す $\mathbf{w}$ に応じて勤労者にとっての最悪の状態が変化し，勤労者が maximin の期待効用を評価する際に採用する確率分布も変化し，勤労者の無差別曲線が微分不能点をもつということである．たとえば $n=2$ の場合，勤労者の maximin 期待効用は $w_1\leq w_2$ なる契約については $(1-\varepsilon)\sum_{i=1}^{2}u(w_i)p_i(a)+\varepsilon u(w_1)-c(a)$，$w_1\geq w_2$ なる契約については $(1-\varepsilon)\sum_{i=1}^{2}u(w_i)p_i(a)+\varepsilon u(w_2)-c(a)$ となり，IR 制約を満たす $\mathbf{w}$ の集合の境界は $w_1 = w_2$ において微分不能となり，企業は賃金契約を提示する際，このことを考慮する必要がある．

企業の利潤が成果の期待値 $E(x|a)$ と賃金費用の期待値 $E(w|a)$ に関して加法分離可能なため，企業の最適化問題を２段階に分解することができる．第１段階で企業は各 $a\in\{a_0, a_1\}$ について賃金コストの期待値 $E(w|a)$ が最小となるような賃金契約（インセンティヴ・スキーム）$\mathbf{w}\equiv(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ を求め，第２段階で企業は a_0, a_1 のどちらの努力水準を勤労者に実行させるのが最適かを考える．



次節以降では，第１段階の問題を専ら扱う．

Ⅲ．企業の，期待賃金費用の最小化

1．リスクプレミアムと不確実性プレミアム

a_j を勤労者に実行させるということを所与とした，企業の賃金コストの最小化問題に関しては，誘因整合性制約（IC 制約）を以下のように表すことができる．

$$\sum_{i\in I} u(w_i)\pi_i p_i(a_1) \begin{cases} \geq \dfrac{c(a_1)-c(a_0)}{1-\varepsilon} & \text{もし } a_1 \text{ を実行させる場合} \\ \leq \dfrac{c(a_1)-c(a_0)}{1-\varepsilon} & \text{もし } a_0 \text{ を実行させる場合} \end{cases} \tag{3}$$

標準的な PA 問題におけると同様，いずれの $a \in \{a_0, a_1\}$ についても，$E(w|a)$ を最小化する最適な賃金契約 $\mathbf{w}^*(a)$ に於いて，IR 制約が有効である．

補題 1. 参加制約条件（*IR* 条件）は最適解で有効である．

証明）仮に *IR* 制約が最適解で有効でないと仮定する．すると，十分小さな正の Δ についてもう一つ別の賃金契約 $\mathbf{w}' \equiv (w_1', w_2', \ldots, w_n')$ で，すべての i について $u(w_i') = u(w_i^*) - \Delta$ となるようなものも，IR 制約及び *IC* 制約の双方を満たす（尤度比 π_i はその定義と確率分布の性質からその $p_i(a_1)$ についての期待値はゼロであるので，$\Delta \sum_{i\in I} \pi_i p(a_1) = 0$ が成立し $\sum_{i\in I} u(w_i^*)\pi_i p_i(a_1) = \sum_{i\in I} (u(w_i^*) - \Delta)\pi_i p_i(a_1)$ であるから，$\mathbf{w}^*$ が *IC* 制約を満たしているなら当然 $\mathbf{w}'$ も *IC* 制約を満たす）が，$E(\mathbf{w}'|a) < E(\mathbf{w}|a)$ であるからこれは $\mathbf{w}$ が最適であることと矛盾する．（証明終わり）

勤労者の効用尺度の単調性より，賃金契約を各々の成果の実現値に対応して勤労者に与える効用 $u_i \equiv u(w_i)$ で特徴づけてもよい．補題 1 より，IR 制約が有効で，$(1-\varepsilon)E(u|a) + \varepsilon u_{\min} = \underline{u} + c(a)$ が成り立つ（$E(u|a) \equiv \sum_{i\in I} u_i p_i(a)$, $u_{min} \equiv \min(u_1, \ldots, u_n)$）．関数 $w(u_i)$ が効用関数の逆関数 $u^{-1}(u_i)$ を表すものとし，外部効用機会で勤労者が得る効用を勤労者に確実に保証する賃金（効用 $\underline{u}+c(a)$ の確実性等価）を記号 $w^*(a)$ で表す．すなわち $w^*(a) \equiv w(\underline{u}+c(a))$ である．

以上の準備の下，各事象が生じた場合の賃金支払い $w(u_i)$ を，確実性等価の周りでテイラー展開すると，

$$\begin{aligned} E(w|a) &\equiv \sum_{i\in I} w_i p_i(a) \\ &= w^*(a) + w'(\underline{u} + c(a)) * \sum_{i\in I} [u_i - (\underline{u} + c(a))] p_i(a) \\ &\quad + \sum_{i\in I} w''((1-\theta_i)(\underline{u} + c(a)) + \theta_i u_i)(u_i - (\underline{u} + c(a)))^2 p_i(a) \end{aligned}$$

となる（$\theta_i \in [0, 1]$ であり，$a \in \{a_0, a_1\}$ である）．

IR 制約を考慮すると，上記の式は

$$\begin{aligned} E(w|a) &\equiv \sum_{i \in I} w_i p_i(a) \\ &= w*(a) + \varepsilon w'(\underline{u} + c(a)) * [E(u|a) - u_{min}] \\ &\quad + \sum_{i \in I} w''((1-\theta_i)(\underline{u} + c(a)) + \theta_i u_i)\,[u_i - (\underline{u} + c(a))]^2\, p_i(a) \end{aligned} \quad (4)$$

と同値である．(4)の右辺の最終項が，通常の「リスクプレミアム」に相当する．

一方，第 2 項は $\varepsilon > 0$ の場合の，ナイト流不確実性の下での PA 問題に固有のプレミアムである．IR 制約を考慮すると，$\underline{u} + c(a) = (1-\varepsilon)E(u|a) + \varepsilon u_{min} = E(u|a) - \varepsilon(E(u|a) - u_{min})$ が成立する．このことを考慮すると，企業が負担する賃金費用の期待値が確実性等価をどれだけ上回るか，すなわち総プレミアム $E(w|a) - w^*(a)$ のテイラー展開は

$$\begin{aligned} E(w|a) - w^*(a) = &\ w'(\underline{u} + a) * E[\varepsilon(E(u|a) - u_{min})] \\ &+ \frac{1}{2!} w''(\underline{u} + a) * E[\{(u_i - E(u|a)) + \varepsilon(E(u|a) - u_{min})\}^2] \\ &+ \frac{1}{3!} w'''(\underline{u} + a) * E[\{(u_i - E(u|a)) + \varepsilon(E(u|a) - u_{min})\}^3] \\ &+ \cdot \cdot \cdot \end{aligned} \quad (5)$$

のようになる．

以下では，Knight 流不確実性 ($\varepsilon > 0$) の下で発生する項に含まれる $\varepsilon(E(u|a) - u_{min})$ をプレミアムのうちの“不確実性要因”, $(u_i - E(u|a))$ を“リスク要因” と呼ぶことにする．不確実性要因は最悪の状態における効用 u_{min} が期待効用 $E(u|a)$ を下回ってどれだけ乖離するか，に相当し，最悪の状態における効用 u_{min} が増えればこの乖離は縮小する．不確実性回避的な勤労者は u_{min} の減少により敏感であり，企業は賃金の最小値を削減しようとするなら，総プレミアムのうちの不確実性要因に与える影響を考慮する必要がある．

一般に，リスク及び不確実性要因は分離不能であるが，より大きな ε の値は総プレミアムに占める不確実性要因のウェイトを大きくする．

IR 制約を満たす如何なる契約についても(4)右辺の第 2 項と第 3 項が非負であることが明らかであり，また，不確実性等価への固定給契約についてはゼロとなることも明らかであるから，勤労者の努力が観察可能な完全情報の場合には，固定賃金契約が最善であり，従来型の PA 問題と同様の結論となる．

理由の直観は以下のとおりである．もし賃金が成果 x_i に応じて変動する場合，これに伴う勤労者の効用低下を補償するためにリスクプレミアムが必要となる．一方，勤労者がリスク回避的であるのみならず不確実性回避的である場合は，固定給以外の賃金契約を提示するにはリスクプレミアム以外の別のプレミアムが企業には必要となる．不確実性回避

的な勤労者にとって，所得変動は単に平均周りの効用のばらつきを大きくするのみならず，最悪の効用の実現値が期待効用（IR 制約下では外部効用機会から得る効用に等しい）を下回って大きく乖離するようになるという意味で，勤労者にとって好ましくなくなる．

２．非対称情報下の次善契約

以下では勤労者の努力水準が観察不可能な場合に，a_0, a_1 をそれぞれ実行させることを所与とした場合の期待賃金コストの最小化問題を考える．

まず，Knight 流不確実性の存在しない場合の標準的な PA 問題と同様，a_0 を実行させることを所与とした場合の最適賃金契約に関しては，IC 制約は有効でない．この場合，確実性等価の固定給を払うことで企業はそれ以上の一切のプレミアムを負担する必要が無く，勤労者も自発的に a_0 を選ぶからである．よって，企業は a_0 を実行させるなら，固定賃金契約がプレミアム最小化の観点から最適となる．

一方，(3) から，勤労者の努力が私的情報である場合，総プレミアムがゼロとなる固定給によって a_1 を実行させることは不可能であり，a_1 を実行させるような契約について First Best は達成不可能である．この節では，このような状況下で a_1 を勤労者に実行させるための，次善の意味で最適な契約に議論を特化し，記号 $E(u)$ を $E(u|a_1)$ の意味で用いる．

ここで新しい変数の定義を導入し，$v_i \equiv u_i - u_{min}$ とする．すると (5) は

$$
\begin{aligned}
\underset{(AP)}{\text{Aggregate Premium}} &\equiv E(w|a) - w^*(a) \\
&= w'(\underline{u} + a) * E[\varepsilon E(v)] \\
&\quad + \frac{1}{2!}\, w''(\underline{u} + a) * E[\{(v_i - E(v)) + \varepsilon E(v)\}^2] \\
&\quad + \frac{1}{3!}\, w'''(\underline{u} + a) * E[\{(v_i - E(v)) + \varepsilon E(v)\}^3] \\
&\quad + \cdots \\
&= E\,[w(v_i - E(v) + \varepsilon E(v) + \underline{u} + c(a_1))] - w^*(a) \qquad (6)
\end{aligned}
$$

と同値であり，企業の問題は以下のように，このプレミアムを変数 v_i について最小化する問題に縮約される．すなわち，企業が解くべき問題は，

$$
\begin{aligned}
&\min_{v_i} AP(\mathbf{v}; a_1, \underline{u}) \equiv && E[w(v_i - E(v) + \varepsilon E(v) + \underline{u} + c(a_1))] - w^* \\
&\qquad s.t. && \\
&\text{（IC 制約）} && \textstyle\sum_{i \in I} v_i \pi_i p_i \geq \frac{c(a_1) - c(a_0)}{1 - \varepsilon} \\
&\text{（}\mathbf{v}\text{ の非負制約）} && v_i \geq 0\ \forall i, \text{少なくとも 1 つの } i \in I \text{ について}, v_i = 0 \qquad (7)
\end{aligned}
$$

となる．（$\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ を，$u_{min} \times (1, \ldots, 1) + (v_1, \ldots, v_n)$ に分解した場合，$\mathbf{u}$ を決定することと u_{min} 及び $(v_1, \ldots, v_n)$ を決定すること（ただし v_i のうち少なくとも一つは 0）とは 1 対 1 に対応する．

しかも，IR 制約が最適解で有効であるから，IR 制約が等式で成り立つため，$(v_1, . . . , v_n)$ が決定するとIR 制約を通じて u_{min} が自ずと定まる．よって，a_1 を実行させることを所与とするなら，(7) と (2) とは同値となる．）この問題について，以下の補題が成立する．

補題 2. 問題（7）の最適解において，*IC* 制約が有効である．

証明） 最適解において *IC* 制約が有効でないと仮定する．*IC* 制約により，少なくとも $\pi_i > 0$ なる一つの $i \in I$ について v_i が厳密に正でなければならない．v_j を，$\pi_j > 0$ かつ $v_j > 0$ であるもののうち最大のものであるとする．*IC* 制約が有効でないなら，v_j をごくわずかに減らしても，*IC* 制約は破られない．しかも，このような v_j の変更についての企業の賃金コストの期待値の偏微係数は，$\frac{\partial E(w)}{\partial v_j} = w'(u_j)p_j - (1-\varepsilon)E[w'(u)] * \frac{\partial E(v)}{\partial v_j} = [w'(u_j) - (1-\varepsilon)E[w'(u)]] > 0$ より正であるので，v_j をごくわずかに減らすと企業の負担する賃金コストの期待値は減少する．これは元の契約が最適であることと矛盾する．（証明終わり）

勤労者がリスク中立的だが不確実性回避的な場合

勤労者の不確実性回避的な選好が最適契約に及ぼす影響を理解するため，まず初めにリスク中立的な企業と，リスク中立的だが不確実性回避的である勤労者との間の契約を考察する．

企業と勤労者の双方がリスク中立的だが勤労者が不確実性回避的である $(\varepsilon > 0)$ 場合，均衡契約の性質は，企業と勤労者の双方がリスク中立的である場合の均衡契約とは根本的に異なったものとなる．この根本的な違いは，たとえ ε がどれほど小さくても正でありさえすれば消えることはない．$\varepsilon = 0$ である従来型の PA 問題では，(4) からわかるとおり，勤労者がリスク中立的で $w'' = 0$ である限り，企業は勤労者の所得変動について一切のプレミアムを払う必要はない．従って，企業は一切のリスクプレミアムを負担することなく，a_1 を勤労者に実行させることが可能で，非対称情報下でも最善（First Best）の利得が得られる．そして，外部効用機会から得られる効用を保証しかつ IC 制約を達成するいかなる契約も均衡契約となり，均衡契約は無数に存在しうる．

ところが，勤労者がこの状態からごく僅かに不確実性回避的になっただけで，すなわち，リスク中立的でありながらも $(u'' = w'' = 0)$，$\varepsilon > 0$ となっただけで，たとえ ε がいかに小さなものであっても正でありさえすれば，均衡の性質は根本から変わってしまうのである．企業にとって高い努力コストを勤労者が要する a_1 を実行させるための，総プレミアムを最小化する最適な契約は，一意に確定する．a_1 を勤労者に実行させたいなら，企業は総プレミアムをゼロにはできず，企業にとって次善の状態しか達成できない．(4) が示すよう

に，IC 制約を満たすよう勤労者にインセンティヴを与えるには，不確実性プレミアムが必要となる．

もし勤労者がリスク中立的であるならば，(6)式の 2 次以上の高次項がすべてゼロとなり，企業の問題は

$$E(w|a) - w^*(a) \equiv w'(\underline{u} + a) * \varepsilon E(v) \tag{8}$$

を IC 制約と v の非負制約の下で最小化する問題に帰着する．この問題の解について，直ちに以下の命題が成立する．

命題 1. $w''= 0$（すなわち $u''= 0$）とする．如何なる $\varepsilon \in (0, 1)$ についても，問題(8)の解は一意に定まり，その一意に定まる解としてのインセンティヴ・スキームは，任意の 3 以上の n について，各状態 i について支払われる報酬 w_i が 2 種類の異なる値しか取らず，$w_1 = w_2 = \cdots = w_{n-1} < w_n$（または同じことであるが，$0 = v_1 = v_2 = \cdots = v_{n-1} < v_n$）という形態をとる．

証明） 尤度比単調増加の仮定および，確率分布の性質から，ある閾値となる自然数 $1<m<n$ が存在して $\forall i \leq m, \pi_i \leq 0$ かつ $\forall i > m, \pi_i > 0$ である．そこで，最適契約は少なくとも $v_i = 0\ \forall i \leq m$ という性質を満たさなければならない．なぜなら，そうでないと仮定すると，最適契約においてある m 以下の i について $v_i > 0$ となるが，v_i を少し減らしても IC 制約は破られず，しかも $E(v)$ を減らすことができるので，最適契約であることに矛盾するからである．そこで最適契約の候補は $\mathbf{v} = (0, 0,\ldots, 0, v_{m+1}, v_{m+2},\ldots, v_n)$ である．しかし，一部のあるいはすべての $j \in \{m+1,\ldots, n-1\}$ について $v_j>0$ となるような契約は，必ず他の契約に支配される．たとえば v_j を $v_j'=0$ に置き換え，$i > j$ なる v_i を $v_i' = v_i + v_j * \frac{\pi_j p_j}{\pi_i p_i}$ に置き換えた別の契約は，尤度比単調増加の仮定から，元の契約より $E(v)$ が $\frac{\pi_i - \pi_j}{\pi_i} v_j p_j > 0$ だけ減少する．このような置き換えによる改善の余地のない契約は，$0 = v_1 = v_2 = \cdots = v_{n-1} < v_n$ の形態のものに限られる．（証明終わり）

たとえ勤労者がリスク中立的であったとしても，不確実性回避的であるなら，最適な賃金契約は最高位の成果以外のすべての成果について固定給を支払う，という形態のものになる．不確実性回避の尺度 ε が大きければ，固定給と，最高位の成果に対する報奨の差は大きくなる．

このような結果が得られる直観的な理由は以下のとおりである．従来型の PA 問題で企業がリスク中立的かつ勤労者がリスク回避的である場合，最高位の成果にのみ追加の報奨を支払うというような極端なインセンティヴの付与方法をとると，勤労者にとっての平均

的な効用と最高位の効用との乖離を大きくすることを通じ，勤労者の期待効用が下がるため，企業はこれを補償するためにより大きなリスクプレミアムを払う必要に迫られる．しかし，もし勤労者が不確実性回避的ではあるがリスク中立的である場合は，平均的な効用と最高位の効用の差は勤労者の期待効用の下落をもたらさず，企業はその点についてリスクプレミアムを支払う必要がない．寧ろ勤労者は，最悪の効用が平均的な効用を下回って大きく乖離する（$E(v)$ が大きくなる）ことを深刻に捉えるため，企業はこれを補償するための不確実性プレミアムを負担する必要がある．そして，$E(v)$ をできるだけ小さくして不確実性プレミアムを節約するには，尤度比単調増加の性質から，勤労者へのインセンティヴ付与を最高位の成果に対する報酬に集約することが望ましくなるのである．

３．リスク中立的かつ不確実性中立的な企業と，リスク回避的かつ不確実性回避的な勤労者の間の契約

前節までの仮定に加え，勤労者が不確実性回避的であるだけでなくリスク回避的である場合には，企業は総プレミアムに含まれる不確実性要因のみならず，リスクプレミアムにも留意する必要があり，命題１が示すような極端なインセンティヴ・スキームは必ずしも最適ではなくなる．この場合に最適なインセンティヴ・スキームは，従来型の PA 問題の解（成果の全域にわたり，単調増加の変動給を払う）と，命題１（ほとんどの成果について固定給を払い，最高位の成果についてのみ報酬を上乗せする）との中間の形態，すなわち，ある閾値までの成果に対しては固定給，それを超える成果については成果と正相関する変動給を払う，というものになる．

IR 制約を考慮すると，企業の問題は(7)に帰着する．ただし，勤労者のリスク回避的選好の仮定から，$u(w)$ の逆関数 $w(u)$ について，$w' > 0$ かつ $w'' > 0$ である．以下の補題と命題が従う．

命題 2. $n \geq 3$ であるとする．もし勤労者の選好が不確実性回避的のみならずリスク回避的であるならば，努力 a_1 を実行させる契約の中で賃金費用の期待値が最小となる最適な賃金契約は，成果の指標 i の全域にわたり単調強増加の変動給か，あるいは $0 = v_1 = \cdots = v_m < v_{m+1} < \cdots < v_n$ という形（固定給と変動給の混合）のいずれかになる．

証明） IC 制約及び v_i が非負であるという制約より，最適契約 $\mathbf{v}$ について少なくとも一つの $j \in \{i \in I | \pi_i > 0\}$ について，$v_j > 0$ でなければならない．添え字 $k \in I$ を，そのような v_j の中で最大のものの添え字とする．

v_i と v_k の微小な変化を考える．IC 制約が最適解で有効であるから，$\dfrac{dv_k}{dv_i} = -\dfrac{\pi_i p_i}{\pi_k p_k}$

が成り立たなければならない（k の定義と仮定 1 より，$\pi_k p_k > 0$ であることに留意）から，

$$dE(v) = dv_i p_i + dv_k p_k = \left(\frac{\pi_k - \pi_i}{\pi_k}\right) dv_i p_i$$

かつ，

$$dE[w(u)]$$

$$= \left[w'(u_i) - (1-\varepsilon)E[w'(u)] - \frac{w'(u_k) - (1-\varepsilon)E[w'(u)]}{\pi_k}\pi_i\right] p_i dv_i \tag{9}$$

である．係数 μ を $\mu \equiv \frac{w'(u_k) - (1-\varepsilon)E[w'(u)]}{\pi_k}$ と定義する．もし v_i が最適で $v_i \neq 0$ の内点の場合，(9) の右辺の鍵括弧の中身はゼロでなければならない．一方，v_i が $dE[w(u)]$ の最小値を達成し，かつ $v_i = 0$ の端点である場合，右辺の鍵括弧の中身は正かゼロでなければならない．そこで，最適化の 1 階条件は，

$$w'(u_i) \geq (1-\varepsilon)E[w'(u)] + \mu\pi_i \quad if \quad v_i = 0 \tag{10}$$

$$w'(u_i) = (1-\varepsilon)E[w'(u)] + \mu\pi_i \quad if \quad v_i > 0 \tag{11}$$

である．(10)はパラメータ θ_i を導入して

$$w'(u_{min}) = (1-\varepsilon)E[w'(u)] + \mu\pi_i + \theta_i \quad if \quad u_i = u_{min} \tag{12}$$

とも表現できる．ここで，$\theta_i \geq 0$ である．添え字の集合 I_{min} を集合 $I \equiv \{1, 2, \ldots, n\}$ の部分集合で，$\{i \in I : v_i = 0\}$ が成立するようなものとする（固定給が支払われる対象の事象についての添え字の集合とする）．(11)と(12)について，期待値を取ると，

$$\sum_{i \in I_{min}} p_i\theta_i = \varepsilon E[w'(u)] \tag{13}$$

が成立する．

(11)と(12)より，命題の証明としては，$\mu > 0$ であることを証明すれば足りる．
(11)と(12)を移項すると，

$$\mu\pi_i = w'(u_i) - E(w'(u)) + \varepsilon E(w'(u)) - \theta_i$$

を得る．$\theta_i \geq 0$ が $i \in I_{min}$ について成り立つ．両辺に $u_i p_i$ を乗じて，すべての $i \in I$ について総和を取ると，

$$\mu E(\pi_i u_i) = Cov(w'(u_i), u_i) + \varepsilon E(w'(u))E(u) - u_{min}\sum_{i \in I_{min}} p_i\theta_i$$
$$= Cov(w'(u_i), u_i) + \varepsilon E(w'(u))\{E(u) - u_{min}\} > 0$$

（Cov は共分散を表す）．最初の等号は $\theta_i = 0 \ \forall i \in I \setminus I_{min}$ であることから成立し，第 2 の等号は(13)の帰結である．IC 制約より，$E(\pi_i u_i) > 0$ である．よって，$\mu > 0$ である．（証明終わり）

4．例：2次のプレミアム

命題2は最適契約（$v_1^*, v_2^*, \ldots, v_n^*$）が，ある閾値 $m \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ について，m 以下のすべての i については $v_i^* = 0$，それを超える i について $v_i^* > 0$ かつ v_i が i について単調強増加となる，ということを示すが，ではこの閾値 m（つまりは固定給の範囲の大きさ）はどのような要因によって決まるであろうか．

最適な m は，不確実性プレミアムの最小化と，リスクプレミアムの最小化の間のトレード・オフ関係から決まる．命題1の証明によって示されたとおり，固定賃金の範囲を拡大する（m を大きく設定する）ことは不確実性プレミアムの節約に寄与するものの，これは勤労者の高い努力に対するインセンティヴを削いでしまう．そこで，固定給の範囲を拡大しようとするなら，企業は勤労者のインセンティヴに対する悪影響を考慮して，v_i の分散を広げる必要があり，IR 制約を考慮するとその分より大きなリスクプレミアムの負担が必要となる．

この直感を明らかにするため，(6)における3次以上の高次項を無視しうると考える．このケースは，勤労者の効用尺度が相対的危険回避度一定のクラスで相対的危険回避度が1/2に等しい場合か，一般的な効用関数について近似的に最適な賃金契約を考慮することに対応する．その場合，総プレミアムは

$$\underset{(AP)}{\text{Aggregate Premium}} \equiv \frac{1}{2}\, w'' * Var(v) + \varepsilon\left[w' * E(v) + \frac{1}{2}\, w'' * \varepsilon\{E(v)\}^2\right] \tag{14}$$

と表せる．ここで $Var(v)$ とは v_i の分散を表す．

（1）リスクプレミアムと不確実性プレミアムのトレード・オフ

もし $\varepsilon = 0$ であるなら，(14)が示す総プレミアムのうちの不確実性の要素が消滅し，総プレミアムは v_i の分散に比例する．一方，不確実性プレミアム，すなわち $\varepsilon[w' * E(v) + \frac{1}{2} w'' * \varepsilon\{E(v)\}^2]$ は $v_i \equiv u_i - u_{min}$ の期待値，$E(v)$ の関数である．補遺で示されるとおり，IC 制約を考慮すると，$E(v)$ は閾値 m の減少関数であり，$Var(v)$ の下限は m の上昇とともに増大する．

このようなトレード・オフ関係は，リスクプレミアムが(14)のように2次の形を取る場合には明瞭に示すことができる．リスクプレミアムと不確実性プレミアムは(14)式では加法分離的であるため，企業にとっては $E(v)$ が何であれ，$E(v)$ が一定となるような賃金契約の中では $Var(v)$ をできるだけ小さくすることが最適である．すると，総プレミアム最小化問題は2段階，1) $E(v)$ を所与として $Var(v)$ を IC 制約及び v の非負制約の下で最小化

することと，2) 1) を踏まえて $E(v)$ を調整して総プレミアムを最小化すること，とに分解できる．1) の段階の解は Kuhn-Tucker 条件より，以下の性質をもつことがわかる．すなわち，

$$v_i = \max[0, \lambda(\pi_i - \underline{\pi})] \tag{15}$$

ここで，λ は IC 制約に関する正のラグランジュ乗数であり，$\underline{\pi}$ は区間 $[\pi_1, \pi_{n-1})$ に含まれる一種の閾値である．ステップ関数 $m(\underline{\pi}) : [\pi_1, \pi_{n-1}] \rightarrow \{1, \ldots, n-1\}$ を $m(\underline{\pi}) = m$ if $\underline{\pi} \in [\pi_m, \pi_{m+1})$ と定義すると，(15) に示された契約は以下のように表現される．

$$v_i = \begin{cases} 0 & \text{if } i \leq m(\underline{\pi}) \\ \lambda(\pi_i - \underline{\pi}) & \text{if } i \geq m(\underline{\pi}) + 1 \end{cases} \tag{16}$$

$\underline{\pi}$ が，固定給から変動給への閾値，m を画している．そこで，(15) によって特徴づけられるインセンティヴ・スキームについて IC 制約は

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \pi_i p_i = \lambda \sum_{i=m(\underline{\pi})+1}^{n} (\pi_i - \underline{\pi}) \pi_i p_i = \frac{\Delta c}{1-\varepsilon} \tag{17}$$

（ただし $\Delta c \equiv c(a_1) - c(a_0)$）という具合に表現できる．

$\sum_{i=m(\underline{\pi})+1}^{n} (\pi_i - \underline{\pi}) \pi_i p_i$ が $\underline{\pi}$ について連続であるが微分不能点をもつ減少関数であるので，(17) は，λ が $\underline{\pi}$ について連続ではあるが $\underline{\pi} = \pi_i$, $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ で微分不能となる増加関数であることを示唆している．固定賃金の領域が拡大するにつれ，勤労者のインセンティヴを維持するために変動給部分の成果の増加に対する増加率が増大しなければならず，λ は増大する．このことはまた，閾値 $\underline{\pi}$ と最悪の効用の平均的効用からの下方への乖離 $E(v)$ とが負の相関関係にある（または同じことであるが，$\underline{\pi}$ と不確実性プレミアムとが前の小節で議論された通り負の相関関係にある）ことを示唆する．具体的には，微分可能点に於いて

$$\frac{dE(v)}{d\underline{\pi}} = -\left(\frac{\Delta c}{1-\varepsilon}\right)^{-1} \lambda^2 (1 - P_m)^2 Var(\pi_i | i \geq m + 1) \tag{18}$$

が成立する．ここで，P_m は固定給が支払われる事象が発生する確率すなわち $P_m \equiv \sum_{i=1}^{m} p_i$ を示し，$Var(\pi_i | i \geq m + 1)$ は尤度 π の，変動給が支払われるような事象が発生したことを所与とする条件付き分散を示す（(18) の導出は補遺 A を参照）．$E(v)$ または不確実性プレミアムは閾値を画すパラメータ $\underline{\pi}$ の減少関数であり，IC 制約が $E(v)$ と $\underline{\pi}$ と，λ の対応関係を画し，(15) のクラスの契約は各 $E(v)$ についての $Var(v)$ の下限を決める．そこで，$Var(v)$ の下限は $E(v)$ の陰関数であり，微分可能点に於いては

$$\frac{dVar(v)}{dE(v)} = -2\lambda \sum_{i=1}^{m(\underline{\pi})} (\underline{\pi} - \pi_i) p_i < 0, \tag{19}$$

が成立する（導出は同じく補遺 A を参照）．つまり，$Var(v)$ は $E(v)$ と負の相関関係にあり，固定給の閾値 m の選択においてリスクプレミアムの軽減と不確実性プレミアムの軽減は

図１　不確実性プレミアムとリスクプレミアムのトレード・オフ

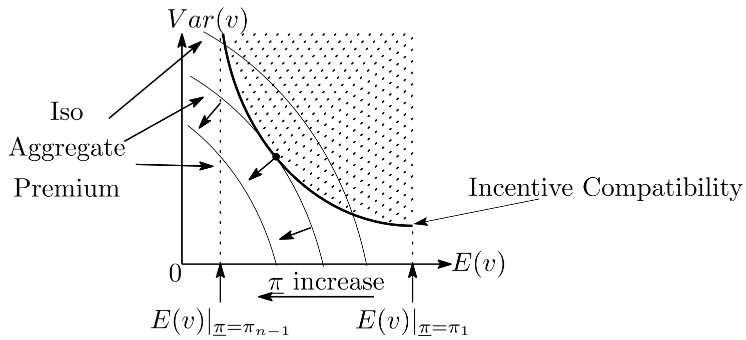


図２　ε＝０ and w″＞０

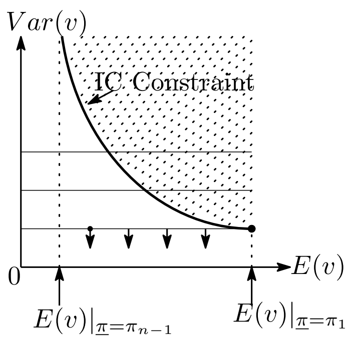
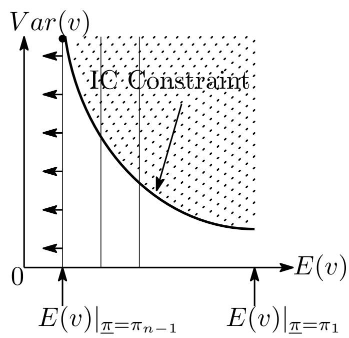


図３　ε＞０ and w″＝０



両立せず互いにトレード・オフ関係にある．図１はこのトレード・オフを示したものである．太い実線が示しているのが，IC 制約を満たすような $E(v)$ と $Var(v)$ の下限の関係である．$m(\underline{\pi})$ も λ も $\underline{\pi}$ の増加関数であるので，(19)の右辺は $\underline{\pi}$ の減少関数である．すなわち，(19)の右辺は $\underline{\pi}$ と $E(v)$ の負の相関(18)を考慮すると $E(v)$ については増加関数となる．つまり，$Var(v)$ の下限は図１が示すとおり $E(v)$ の凸関数となる．

一方，図１の細い線は(14)が示している，企業にとっての等費用曲線すなわち“等プレミアム”曲線を表す．$\varepsilon > 0$ である限り，この曲線は右下がりであり，最適な閾値 $\underline{\pi}$ は区間 (π_1, π_{n-1}) に存在することになり，部分的固定給が均衡となりうる．

図２は標準的な PA 問題のケース，つまり勤労者がリスク回避的であるが不確実性回避的でない（すなわち $\varepsilon = 0$ の）場合を示している．勤労者が要求するプレミアムは専ら $Var(v)$ に依存し，企業にとっては $Var(v)$ を最小とすべく $E(v)$ が最大となるような閾値すなわち，可能な限り低い $\underline{\pi} = \pi_1$ を選ぶのが最適で，成果の全域にわたり変動給を支払うのが最適となる．

図3は逆に，勤労者がリスクに関しては中立的だが不確実性回避的な選好を有する場合のケースを示す．この場合，勤労者は $Var(v)$ の違いに無頓着で，その要求するプレミアムは最悪の効用の平均的効用からの下方への乖離 $E(v)$ にのみ依存するため，これを最小化すべく，閾値をできるだけ大きく設定，つまり，$\underline{\pi} = \pi_{n-1}$ とするのが最適となる．

（2）比較静学：固定給から変動給へ切り替わる閾値

固定給の範囲 m を画する最適な $\underline{\pi}$ は，その上昇がもたらす不確実性プレミアムの減少の限界便益とリスクプレミアム増大の限界費用と比較によって決まる．(14)を $E(v)$ について，(19)と IC 制約(17)を考慮しながら微分すると，

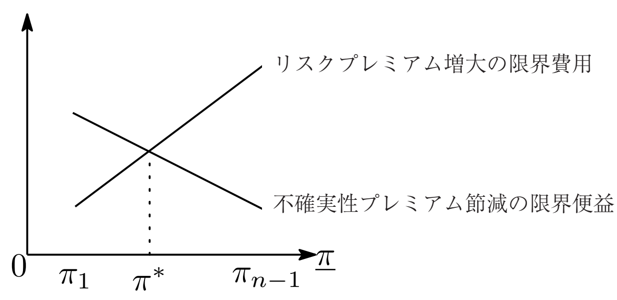
$$\frac{dAP}{dE(v)} = -w''\lambda\sum_{i=1}^{m(\underline{\pi})}(\underline{\pi}-\pi_i)p_i + \varepsilon[w' + \varepsilon w'' E(v)] \tag{20}$$

を得る．$E(v)$ と $\underline{\pi}$ の負の相関及び $w' > 0$ であることを考慮すると

$$sgn\left(\frac{dAP}{d\underline{\pi}}\right) = sgn\left(-\frac{dAP}{dE(v)}\right) = sgn\left(\frac{w''}{w'}\lambda\sum_{i=1}^{m(\underline{\pi})}(\underline{\pi}-\pi_i)p_i - \varepsilon\left[1+\varepsilon\frac{w''}{w'}E(v)\right]\right). \tag{21}$$

が成り立つ．右辺の第1項が $\underline{\pi}$ の限界的増加がもたらすリスクプレミアム増加の限界費用，第2項が不確実性プレミアム減少の限界便益に相当する．$m(\underline{\pi})$ も，λ も $\underline{\pi}$ について増加関数であるので前者は $\underline{\pi}$ の増加関数，後者の絶対値は $E(v)$ と $\underline{\pi}$ の負の相関より $\underline{\pi}$ について減少関数である．したがって，総プレミアムを最小化する最適な $\underline{\pi}$ が区間 $[\pi_1, \pi_{n-1}]$ の中に必ず，一意に存在する．

図4　限界リスクプレミアムと限界不確実性プレミアム



(21)式に含まれる $\frac{w''}{w'}$ は，一種のリスク回避の尺度と理解できる．w が効用尺度 $u(w)$ の逆関数であることから，$\frac{w''}{w'} = -\frac{u''}{(u')^2}$ であるが，これは勤労者の外部効用を確実に与える固定給（確実性等価）で評価した，限界効用1単位当たりの絶対的危険回避度である．(21)右辺が示す限界便益と限界費用の双方がこのリスク回避尺度 $\frac{w''}{w'}$ の影響を受けるため，固

定給の最適な範囲 $\underline{\pi}$（または m）が $\frac{w''}{w'}$ と ε の影響をどのように受けるかは，図 4 からは自明ではない．しかし，(17)を代入し，(21)右辺を整理すると，以下の命題を得る．

命題 3. リスク回避尺度 $\frac{w''}{w'}$ と不確実性回避尺度 ε と固定給の最適な範囲 m とについて，以下の二つの命題が成立する．

3-1) 不確実性回避の尺度 $\varepsilon \in [0, 1)$ を所与とすると，最適な固定給の範囲はリスク回避尺度 $\frac{w''}{w'}$ の増加につれて縮小する．

3-2) リスク回避尺度 $\frac{w''}{w'}$ を所与とすると，最適な固定給の範囲は ε が極端に大きくない限り，リスク回避尺度 ε の増加につれて拡大する．その十分条件は，$\varepsilon \leq \frac{1}{2}$ である．

証明は補遺 B で示される．ε が増大するにつれ，不確実性プレミアムを節約することの企業にとっての限界便益が大きくなる．これは固定給の範囲の拡大に作用するが，ε の増大は一方で，IC 制約をよりきつくするため，あまりに大きな ε については逆に ε の増大は固定給の範囲の縮小要因となる．命題 3-2 はそのことを反映している．

Ⅳ．結語

もし勤労者が複数の確率分布についての Maximin の期待効用最大化を図るのであれば，その勤労者は最善と最悪の効用の実現値のばらつきよりも，最悪の効用の実現値が期待効用を下回ることを重大視する．このような勤労者を契約につなぎとめるためには，企業にはリスクプレミアムよりも寧ろ不確実性プレミアムと呼ぶべき，期待効用と最悪の効用の実現値の差に比例するプレミアムの負担が発生する．特に勤労者がリスク中立的であるが不確実性回避的である場合は，企業にとって，不確実性プレミアムを最小化するために，最高位の成果以外のすべての成果については固定給を支払い，勤労者へのインセンティヴの付与は専ら最高位の成果についての特別の報奨で行うことが最適となる．このことは，ε がいかに小さくても正でありさえすれば成立する．

勤労者が不確実性回避的であるとともにリスク回避的でもある場合には，このような極端なインセンティヴ・スキームはリスクプレミアムの増大要因となる．そこで，最適なインセンティヴ・スキームは，ある閾値以下の成果について固定給，それを超える成果について成果に正相関する変動給を払う，という形態のものとなる．固定給が支払われる対象となる成果の範囲は，あらゆる正の ε を所与として勤労者のリスク回避度の尺度が大きく

なると小さくなる．つまり，相対的に不確実性回避度の尺度 ε よりリスク回避度が深刻になれば，固定給の範囲が狭まり，変動給の範囲が広がる．一方，リスク回避度の尺度を所与とした場合，1/2 より小さい ε の範囲について，ε の増大は固定給の範囲の拡大につながる．勤労者の直面する Knight 流不確実性の度合いが深刻になるほど，固定給の範囲は拡大する．

本論文では専ら勤労者側の Knight 流不確実性を扱ったが，企業が Knight 流不確実性に直面する場合への分析の拡張は今後の課題である．

補遺 A：(18)および(19)の導出

(15) のクラスの契約について，

$$E(v) = \lambda \sum_{i=m(\underline{\pi})+1}^{n} (\pi_i - \underline{\pi})p_i \tag{22}$$

であり，IC 制約は(17)となる．関数 $m(\underline{\pi})$ がステップ関数であるため，$\underline{\pi}$ の陰関数としての，λ と $E(v)$ は $\underline{\pi}=\pi_i$ に於いて微分不可能である．しかし，$\sum_{i=m(\underline{\pi})+1}^{n}(\pi_i-\underline{\pi})p_i$ と $\sum_{i=m(\underline{\pi})+1}^{n}(\pi_i-\underline{\pi})\pi_i p_i$ とが $\underline{\pi}$ について連続であることから，これら陰関数も連続である．以下の議論の微分はすべて，$m(\underline{\pi}) = m$ が成立する範囲での微分可能な区間，$\underline{\pi} \in (\pi_m, \pi_{m+1})$ で評価したものとする．

(22)および IC 制約(17)を微分すると

$$A \begin{pmatrix} \frac{d\lambda}{\lambda} \\ d\underline{\pi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dE(v) \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ただし } \quad A \equiv \begin{pmatrix} E(v) & -\lambda(1-P_m) \\ \frac{\Delta c}{1-\varepsilon} & -\lambda(\sum_{i=m+1}^{n} \pi_i p_i) \end{pmatrix}$$

（ここで $P_m \equiv \sum_{i=1}^{m} p_i$）であるが，(22)と(17)を考慮して，

$$\begin{aligned} \det A &= \lambda^2 \left[(1-P_m)\sum_{i=m+1}^{n}(\pi_i-\underline{\pi})\pi_i p_i - \left\{\sum_{i=m+1}^{n}(\pi_i-\underline{\pi})p_i\right\}\left(\sum_{i=m+1}^{n}\pi_i p_i\right)\right] \\ &= \lambda^2(1-P_m)^2\{E[(\pi_i-\underline{\pi})\pi_i|i \geq m+1] - E\,[(\pi_i-\underline{\pi})|i \geq m+1]E(\pi_i|i \geq m+1)\} \\ &= \lambda^2(1-P_m)^2 Var(\pi_i|i \geq m+1) \end{aligned}$$

を得る．ここで，$E[\cdot|i \geq m+1]$, $Var[\cdot|i \geq m+1]$ はそれぞれ，$i \geq m+1$ であることを条件とした（変動給範囲の事象が生じたことを条件とした），条件付き期待値と条件付き分散を表す．

すると，

$$\begin{pmatrix} \frac{d\lambda}{\lambda} \\ d\underline{\pi} \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} dE(v) \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} -\lambda \sum_{i=m+1}^{n} \pi_i p_i dE(v) \\ -\frac{\Delta c}{1-\varepsilon} dE(v) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} -[E(v)+\lambda(1-P_m)\underline{\pi}]dE(v) \\ -\frac{\Delta c}{1-\varepsilon}dE(v) \end{pmatrix} \tag{23}$$

となる．最後の等号が成立するのは(22)による．(23)は(18)を含意する．

一方，(15)のクラスの契約については v の分散（条件付きでない）は

$$Var(v) = \lambda^2 \sum_{i=m+1}^{n} (\pi_i - \underline{\pi})^2 p_i - \{E(v)\}^2$$

$$= \lambda\left(\frac{\Delta c}{1-\varepsilon} - \underline{\pi}E(v)\right) - \{E(v)\}^2 \tag{24}$$

である（二番目の等号は IC 制約(17)の帰結）から，これを微分して

$$dVar(v) = \left(\frac{\Delta c}{1-\varepsilon} - \underline{\pi}E(v)\right)d\lambda - \lambda E(v)d\underline{\pi} - \lambda\underline{\pi}dE(v) - 2E(v)dE(v) \tag{25}$$

である．(23)の解を $d\lambda$ と $d\underline{\pi}$ に代入すると，(17)と(22)を考慮すれば，(25)の右辺の $-2E(v)dE(v)$ 以外の項の合計は $-\lambda\underline{\pi}dE(v)$ に等しくなる．よって，

$$dVar(v) = -2[\lambda\underline{\pi} + E(v)]dE(v) = -2\lambda\left(\underline{\pi} + \sum_{i=m+1}^{n}(\pi_i - \underline{\pi})p_i\right)dE(v)$$

$$= -2\lambda\left(P_m\underline{\pi} + \sum_{i=m+1}^{n}\pi_i p_i\right)dE(v)$$

である．ここで，確率分布の性質から $\sum_{i=1}^{n} \pi_i p_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i(a_1)-p_i(a_0)}{p_i(a_1)} p_i(a_1) = 0$ が成り立つことから，$\sum_{i=m+1}^{n} \pi_i p_i = -\sum_{i=1}^{m} \pi_i p_i$ が成り立つ．このことを上の式に当てはめれば，(19)がただちに得られる．

補遺 B: 命題 3 の証明

(22)を代入すると，(21)は以下と同値である．すなわち

$$sgn\left(\frac{dAP}{d\underline{\pi}}\right) = sgn\left[\frac{w''}{w'}\ \lambda\left\{\sum_{i=1}^{m(\underline{\pi})}(\underline{\pi}-\pi_i)p_i - \frac{\varepsilon^2}{\lambda}\sum_{m(\underline{\pi})+1}^{n}(\pi_i - \underline{\pi})p_i\right\} - \varepsilon\right]$$

各々の，与えられた ε の下で，λ は $\underline{\pi}$ について増加関数であることが(17)からわかっている．そこで上の式の中括弧の中身もまた $\underline{\pi}$ について増加関数である．よって鍵括弧の中身の第 1 項は $\underline{\pi}$ の増加関数であり，1 階条件を満たす点で非負である（内点解で ε に等しい）．そこで $\frac{w''}{w'}$ の増加は $\underline{\pi}$ の減少をもたらし，まず 3-1 が証明される．

一方，$\lambda > 0$ であることから，(21)は

$$sgn\left(\frac{dAP}{d\underline{\pi}}\right) = sgn\left[\frac{w''}{w'}\sum_{i=1}^{m(\underline{\pi})}(\underline{\pi}-\pi_i)p_i - \frac{\varepsilon}{\lambda}\left(1 + \varepsilon\frac{w''}{w'}E(v)\right)\right]$$

をも含意する．鍵括弧の第 1 項は $\underline{\pi}$ について増加関数であり，第 2 項は減少関数であるから，命題 3-2 の証明のためには，第 2 項 $g(\varepsilon) \equiv \frac{\varepsilon}{\lambda}(1+\varepsilon \frac{w''}{w'} E(v))$ が比較的小さな ε について ε の増加関数となっていることを示せば十分である．

$$\frac{d \ln g(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} + \frac{\frac{w''}{w'}\left(E(v) + \varepsilon \frac{\partial E(v)}{\partial \varepsilon}\right)}{1 + \varepsilon \frac{w''}{w'} E(v)} - \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial \varepsilon}$$

であり (17) と (22) より $\frac{\partial E(v)/\partial\varepsilon}{E(v)} = \frac{\partial\lambda/\partial\varepsilon}{\lambda} = \frac{1}{1-\varepsilon}$ が成立するから，

$$sgn\left(\frac{d \ln g(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right) = sgn\left(1-2\varepsilon + 2(1-\varepsilon)\varepsilon \frac{w''}{w'} E(v)\right)$$

であり，

$$\frac{d \ln g(\varepsilon)}{d\varepsilon} \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2(1+\varepsilon \frac{w''}{w'} E(v))} \geq \varepsilon$$

となる．$\varepsilon \geq 0,\ w'' \geq 0,\ E(v) > 0$ であるから，この不等式の成り立つ ε の範囲で当然 $\varepsilon \leq \frac{1}{2}$ も成立する．（証明終わり）

参考文献

[1] Azariadis, Costas, 1975. Implicit Contracts and Underemployment Equilibria. *Journal of Political Economy* 83, 1183-1202.

[2] Azariadis, Costas, and Stiglitz, J.E., 1983 . Implicit Contracts and Fixed Price Eauilibia. *Quarterly Journal of Economics* 98, 1-22.

[3] Chari, V.V., 1983. Involuntacy Unemployment and Implicit Contracts. *Quarterly Journal of Economics* 98, 107-122.

[4] ―――, 1989. Labor Contracts in a Model of Imperfect Competition. *American Economic Review* 79, 358-363.

[5] Gilboa, Izhak, and Schmeidler, D., 1989. Maxmin Expected Utility with Non-unique Prior, *Journal of Mathematical Economics* 18, 141-153.

[6] Grossman, Sanford J. and Hart, Oliver D., 1981. Implicit Contracts, Moral Hazard, and Unemployment. *American Economic Review* 71, 301-307.

[7] Karni, Edi, 2009. A Reformulation of the Maxmin Expected Utility Model with Application to Agency Theory. *Journal of Mathematical Economics* 45, 97-112.

[8] Nishimura, Kiyohiko G., and Ozaki, Hiroyuki, 2006. An Axiomatic Approach to ε- contamination. *Economic Theory* 27, 333-340.