Lucas（1972）のモデルにおける貨幣の非中立性

松　井　宗　也

概　　要

Lucas (1972) はマクロモデルに情報の不完全性を導入することで，古典的な貨幣の中立性とフィリップス曲線における失業とインフレ率の関係を矛盾なく説明した．そこでは，貨幣供給量自体は，その水準に比例する形で物価が変化するため，実体経済に影響を及ぼさない．これは貨幣数量説の成り立つことを意味する．一方で，予期せぬ貨幣的ショックは，それが実体的（リアル）なショックと区別できないために，実体経済に影響を与える．このことから失業は（予見できる）金融政策により，操作可能でないことが結論づけられる．ところが，実は貨幣数量説の成り立つ均衡物価関数は存在のみ証明され，一意性は証明されていないことが分かった（Lucas (1983)）．その上それを否定的に解決するものとして，モデルをより簡単化した枠組みのもとで，貨幣非中立的な均衡解の具体例が得られている（Chiappori and Guesnerie (1990, 1992)）．本稿では（制限を加えない一般の）Lucas (1972) のモデルにおいても，均衡物価関数は一般に貨幣中立的でないことを解析的に示す．ここから，当初 Lucas (1972) が主張したような貨幣の中立性が成立する均衡は特別な場合であることが分かる．そして金融政策により操作可能な貨幣供給量が実体経済にどのような影響を与えるか分析する．さらに，均衡で貨幣が非中立的となるための十分条件を提示する．

キーワード

貨幣の中立性，動学的マクロモデル，フィリップス曲線，貨幣数量説，不完全情報，ミクロ的基礎付け．

I　導入

はじめに Lucas (1972) の経済学において果した貢献を述べる．

マクロ経済学では長期にわたり，貨幣を巡る理論上の大きな論争があった．そしてそのことが金融政策に多大な影響を与えた．それは，マネタリストと称される学派と，ケインジアンと呼ばれる学派の間の論争である．マネタリストとは，大きく捉えるならば，貨幣

数量説（貨幣の中立性）を中核とする新古典派経済学を支持する学派のことである．彼らの中心的な主張は明快で，「貨幣数量の変化は，長期的には単に物価の上昇をもたらすだけで，実体経済に何ら影響を及ぼさない．」とするものである．これは古くから存在する，貨幣ヴェール観（貨幣は財の交換を媒介するだけで，それ自体は実物経済に対して影響を与えない）の考え方をそのまま踏襲したもので，古典派の2分法とも言われる．一方，ケインジアンの主張は反対に「貨幣供給量の変化は，それが予見可能でも実体経済に影響を及ぼす．」とするものである[1)]．その主たる論拠はケインズ自身の主張そのもので，名目賃金ないし価格が硬直的であるというものである[2)]．

これらの論争は，あくまでモデルの静学的な分析に依っていたことに注意されたい．なぜなら Lucas (1972) 以前のマクロ経済モデルでは，いずれも異時点を通して効用を最大化するというミクロ経済主体の合理性を，明示的には取り入れてなかったからである．

ところで，実証分析では失業率と賃金上昇率の間にトレードオフの関係（フィリップス曲線）があることが知られている．つまり失業はインフレ率の減少関数になる．この事実は貨幣の中立性を前提とする，マネタリストの主張と大きく矛盾する．彼らの主張によれば，垂直なフィリップス曲線が存在するのみである．実証結果はむしろケインジアンの主張を擁護するように思われた．

この矛盾した現象から，マネタリストを救うことになるのが Lucas (1972) の貢献である[3)]．それは，フィリップス曲線を，情報の不完全性を用いることでマネタリストの主張（貨幣数量説）と整合的に説明したことである．それどころか Lucas (1972) は，マクロモデルにミクロ経済主体の合理的期待の概念を取り入れ，マネタリストの主張をより強固なものにしたとされた．

以下により詳しい主張を述べる．Lucas (1972) によれば，実体経済に影響を及ぼすのは‘予見できない’貨幣的変動（ショック）のみで，それは（予見できないから）実体的なショックと区別できずにそうなる．換言すれば，人々は貨幣的な変動をあたかも実体経済におけるとそれと錯覚して行動してしまう．そしてフリップス曲線が右下がりなのは，この情報の不完全性が働くからだと主張した．その上で，貨幣的ショックが予見できるもの（情報が完全）であれば，実体経済への影響はなくマネタリストの主張と矛盾しないとした．つまり完全予見のもとで，貨幣の中立性が成り立つのである．加えて Lucas (1972) の優れ

1）ここでは，我々は議論を簡略化して，マネタリストの主張の単なる否定を，ケインジアンの主張としたことに注意が必要である．実際はその影響の経路に関しても，様々な議論がある．例えば，現在の標準的なテキストでは，「貨幣供給量の拡大は，利子率を引き下げ投資を誘発することで，有効需要を増大させる．」とされる．また，短期と長期の区別を重要視する議論もある．

2）ケインズ自身の主張では短期を想定したものとされるが，意見の分かれるところでもある．

3）あくまで理論的にである．

ている点は，これらの結果を，ミクロ経済主体の合理的な行動の結果として導出したことである．つまり，ここでは経済主体は将来に対して合理的な期待を持ち，現在から未来にわたり動学的に最適な行動をとるのである．このことは経済学の根幹をなす「合理的個人」の仮定を，マクロ経済学に厳密に与えたこととして評価されている．いわゆる「マクロ経済学におけるミクロ的基礎づけの理論」はこの論文に端を発するとされる．以上が Lucas (1972) の経済学における大きな貢献である[4]．

ここで，話を戻し Lucas (1972) の貢献から本論文の貢献へと向かう．発表以来 Lucas (1972) 論文の影響力は衰えることがなかった．ところがその後，Grandmont 氏の指摘により，実は貨幣数量説の成り立つ均衡物価関数は存在のみ証明され，一意性は証明されていないことが分かった（Lucas (1983)）．言い換えれば，それ以外の均衡物価関数（貨幣数量説の成り立たない）が存在しないことが，完全には証明されていないことが分かった．実は，この解の一意性を否定するものとして，モデルをより簡単化した枠組みのもとで，貨幣非中立的な均衡解の存在が，具体例をもって示されている（Chiappori and Guesnerie (1990, 1992)）．そこでは，若年期の消費のない効用関数を具体的に与え，さらに実物的なショックと貨幣的なショックにそれぞれ独立に対数正規分布を仮定したもとで，均衡解が無限級数の形で導かれている．その解の形から，貨幣が非中立になる非線形解が連続的に存在することがわかる[5]．（別の文脈では，Otaki (2010) により不確実性のない OLG（世代重複）モデルにおいて貨幣が一般に非中立的になることが示されている[6]．）

本稿では，Lucas (1972) のモデルそのものにおいて，均衡物価関数は一般に貨幣中立的とならないことを解析的に示す．その証明は特に具体的な均衡解に頼ることなく一般的なものである．その結果として，当初 Lucas (1972) が主張した貨幣の中立性が成立する均衡は特別な場合であることがわかる．さらに，貨幣供給量の増大は，有効需要を増大させる方向にも減少させる方向にも働くことが厳密に示される．もちろん中立的な均衡も存在する．このことは，Lucas (1972) のモデルにおいて，ケインジアンとマネタリストのそれぞれの主張は，お互いに矛盾するものではなく，均衡としてはどちらもあり得ることを意味する．

論文の構成は以下のようになる．第Ⅱ章では Lucas (1972) モデルの概略を述べる．そして，第Ⅲ章では貨幣中立的でない均衡解の存在を示す．さらに，貨幣供給量の増大が実体経済へ及ぼす影響も考察する．第Ⅳ章では Lucas (1972) モデルの新しい均衡において，金

4）景気循環論に関する貢献は大瀧 (1994) を参照されたい．ここでは述べない．
5）Chiappori and Guesnerie (1990, 1992) の貢献と本論文との詳しい関連は，Lucas (1972) モデルの説明後に明らかにされる．
6）近刊の和書，大瀧 (2011) にモデルのより体系的な説明がなされている．

融政策と雇用の関係をみる．証明の多くは補論にまとめてある．

Ⅱ Lucas（1972）モデル

本章は大瀧（1994）の第1章を参照した．Lucas（1972）モデルでは毎期Nだけの若者が生まれ，2つ経済圏に $\theta/2$ と $1-\theta/2$ の割合で振り分けられる．ここで θ は（0, 2）の値をとる対称な確率変数である．全ての人は若年期（0期）と老年期（1期）の2期間を生き，老年期をむかえると，今度は各経済圏の貨幣量が等しくなるように移住させられる．働く機会は若者に限られ，1単位の労働で1単位の財が生産されるものとする．労働投入量を n，若者と老人の消費をそれぞれ c_0, c_1 とおくと[7)]，財市場の集約された資源制約式は一人あたり $c_0+c_1 \leq n$, c_0, c_1, $n \geq 0$ となる．若者は生産した財を老人に売り，受け取った貨幣で老年期の消費を賄う．ただし政府による貨幣の追加供給があり，来期の供給量 m_1 は，今期のそれを m_0 とすると，$m_1=m_0x$ となる．ここで，x は貨幣供給の増加率（貨幣に付く利子）を表す確率変数で，（0, ∞）の値をとる．2つのショックを表す確率変数 x と θ は独立とは限らない．

まず，経済主体の合理的行動と財市場の均衡を説明する．個人に共通の効用関数は，

$$U(c_0, n)+E[V(c_1)] \tag{1}$$

で，U と V はそれぞれ，今期と来期の効用関数を表す．E は期待値を表すオペレーターである．関数 U は c の増加関数で n の減少関数となり，2階微分可能で凹関数とする．また現在の消費と余暇はともに下級財でないとする[8)]．効用関数 V は増加で，連続微分可能な凹関数とする．そして $V'(c)c$ は増加で弾力性は1より小さいものとする．

老年期の消費 c_1 の予算制約式は，貯蓄 λ，来期の価格 p_1 と貨幣の増加率 x_1 に依存して $c_1 \leq x_1\lambda/p_1$ となる．効用関数の単調性から均衡に於いて予算制約は有効であり，c_1 は $x_1\lambda/p_1$ に置き換えられる．すると個人の最大化すべき目的関数は

$$\max_{c,n,\lambda \geq 0}\left\{U(c, n)+\int V(c_1)\,dF(x_1, p_1 \mid m, p)\right\} \tag{3}$$

となり，第0期と第1期の予算制約式はそれぞれ

7）特に消費全般を指す場合は単に c と書く．

8）このことは

$$U_{cn}+U_{nn}<0,\ U_{cc}+U_{cn}<0 \tag{2}$$

を意味する．ここで U_{kl}, $\{k,l\}=\{c,n\}$ は効用関数の消費 c または労働投入量 n による偏微分を表す．

$$p(n-c)-\lambda \geq 0, \quad c_1 = x_1 \lambda / p_1 \tag{4}$$

である[9]．この分布関数 F では来期の変数 x_1 と p_1 は，現在の貨幣の流通量 m と価格 p に依存すると仮定していることに注意されたい[10]．

このとき最大化の必要十分条件は Karnsh-Kuhn-Tucker 条件により，

$$U_c(c, n) - p\mu \leq 0, \ \text{等号条件は}\ c > 0, \tag{5}$$

$$U_n(c, n) + p\mu \leq 0, \ \text{等号条件は}\ n > 0, \tag{6}$$

$$p(n-c) - \lambda \geq 0, \ \text{等号条件は}\ \mu > 0, \tag{7}$$

$$\int V'\left(\frac{x_1 \lambda}{p_1}\right) \frac{x_1}{p_1}\, dF(x_1, p_1 \mid m, p) - \mu \leq 0, \ \text{等号条件は}\ \lambda > 0 \tag{8}$$

を満たすベクトル (c, n, λ, μ) が存在することである．不等式制約(5)-(7)で等号が成立するとすると，効用関数 U に関する仮定から消費 c は実質貨幣残高 λ/p の減少関数となることがわかる．すなわち，消費の限界効用 U_c は実質貨幣残高 λ/p の関数となり，

$$h\left(\frac{\lambda}{p}\right) := U_c\left(c\left(\frac{\lambda}{p}\right), \mathrm{c}\left(\frac{\lambda}{p}\right) + \frac{\lambda}{p}\right) \tag{9}$$

とおける．微分すると効用関数の凹性から

$$h' = \frac{U_{cn}^2 - U_{cc}U_{nn}}{U_{cc} + 2U_{cn} + U_{nn}} > 0$$

が成り立つ．それゆえ h は連続微分可能な増加関数であることがわかる．そして(5)と(9)の結果を(8)に代入して

$$h\left(\frac{\lambda}{p}\right) \frac{1}{p} = \int V'\left(\frac{x_1 \lambda}{p_1}\right) \frac{x_1}{p_1}\, dF(x_1, p_1 \mid m, p) \tag{10}$$

を得る．この式の左辺は実質貨幣残高（実質貯畜）の今期における限界効用を表し，右辺はその来期における期待限界効用を表す．これが家計の Euler 方程式となる．

次に貨幣市場の均衡を考える. 総貨幣供給量は Nmx となり, それぞれの経済圏に $Nmx/2$ ずつ供給される．一般性を失わず若者の割合が $\theta/2$ の市場で考える[11]．1 人当たりの貨幣供給量は $(Nmx/2)/(\theta N/2) = mx/\theta$ となり, 貨幣市場の均衡は $\lambda = mx/\theta$ となる. $mx/\theta > 0$ ならば，これを(8)式に代入して均衡条件

$$h\left(\frac{mx}{\theta p}\right) \frac{1}{p} = \int V'\left(\frac{mxx_1}{\theta p_1}\right) \frac{x_1}{p_1}\, dF(x_1, p_1 \mid m, p) \tag{11}$$

9）以下の議論では c_1 は表れないため，c_0 を単に c とおいた事に注意されたい．

10）この仮定は重要で，ここに情報の不完全性が存在する．それは，価格 p からは貨幣的なショック (x) と実体的なそれ (θ) の情報を区別できないことを意味する．

11）もう片方の市場も θ の対称性より，θ を $2-\theta$ で置き換えれば同様の結果が得られる．

を得る．ここから，現在物価 p と将来物価 p_1 が密接に関連することになるが，両者がどのように関連するかは均衡の定義に依存する．この点について Lucas (1972) は以下のように考えている．すなわち，ある期の経済の状態は当該期の変数 (m, x, θ) によって完全に表現できるので，均衡物価は存在するとして (m, x, θ) の関数として $p(m, x, \theta)$ と書ける．すると，来期の均衡物価は今期の変数を (m, x_0, θ_0) として

$$p_1 = p(m_1, x_1, \theta_1) = p(mx_0, x_1, \theta_1)$$

と表せる．つまり p_1 は，m を所与（条件付き）とすると，3 つの (x_0, x_1, θ_1) の確率変数から決まる．そこで，その条件付き同時分布関数を $F_0(x_0, x_1, \theta_1 \mid p(m, x_0, \theta_0))$ とおく．そうすると関数方程式は改めて

$$h\Big(\frac{mx_0}{\theta_0 p(m, x_0, \theta_0)}\Big)\frac{1}{p(m, x_0, \theta_0)}$$

$$= \int V'\Big(\frac{mx_0x_1}{\theta_0 p(mx_0', x_1, \theta_1)}\Big)\frac{x_1}{p(mx_0', x_1, \theta_1)}\, dF_0(x_0', x_1, \theta_1 \mid p(m, x_0, \theta_0)) \tag{12}$$

と書ける．この式を静学的に分析すると，m が所与のもとで $p(m, x, \theta)$ と x/θ は一対一に対応することがわかる[12)]．この単調性を手掛かりとして，均衡物価関数の存在が証明される．

最後に，Lucas (1972) の結果と，関連する先行研究 Chiappori and Guesnerie (1990, 1992) の貢献について解説して章を閉じる．次章の章末でこれらの先行研究と本論文との関連が明らかになる．まず Lucas (1972) では，上に見た手掛かりをヒントに均衡物価を $p(m, x, \theta) = m\varphi(x/\theta)$ と先験的に仮定して[13)]⑿式を満す φ が存在することを示した．この仮定は均衡でも引き継がれ，得られる均衡物価関数は $p^*(m, x, \theta) = m\varphi^*(x/\theta)$ となり，φ^* は m に依存せず貨幣の中立性が成り立つ．他方，Chiappori and Guesnerie (1990, 1992) は効用関数を

$$U(c_0, n) = -\frac{n^2}{2},\ V(c_1) = c_1$$

とおき，2 つのショック (x, θ) の分布がそれぞれ独立に対数正規分布に従うと仮定して，具体的な解を無限級数の形で求めた．そこでは $p(m, x, \theta) = \psi(m, x/\theta)$ が仮定され，さらに $\phi(m, x/\theta) = (mx/\theta)/\psi(m, x/\theta)$ とおくことで均衡式⑿が

$$E\Big[\frac{\theta}{\theta_0}\phi(mx_0, x/\theta) \mid \frac{x_0}{\theta_0}\Big] = \phi^2(m, x_0/\theta_0)$$

12）この証明は当初 Lucas (1972) に与えられていたが，後にそれでは不十分なことが分かった．完全な証明は Lang (1985) に与えられている．

13）もちろんこのように仮定したからといって，均衡解も同様になるとは一般的には言えない．

とされる[14)]．その上で，Chiappori and Guesnerie (1990) では解 ϕ の形を $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z)m^{\lambda k}$，Chiappori and Guesnerie (1992) では $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z)m^{-\lambda k}$ とそれぞれ特定し，関数 $a_k(z)$ と正数 $\lambda > 0$ を明示的に求めている．解の形から，ある $k > 0$ に対し $a_k > 0$ ならば，貨幣が非中立的になることが容易にわかる．つまり Lucas (1972) モデルにおける複数均衡の存在は，1990 年代初頭には示されていたことになる．

Ⅲ 均衡物価関数の存在証明とその性質

本章では，前章でみた条件を満足し，なおかつ Lucas (1972) の示した均衡を含む，より一般的な均衡解が求まらないか考える．ここでは $p(m, x, \theta)=\pi(m)\varphi(\mathrm{x}/\theta)$ と設定を変更して⑿式を満たす $\varphi(\mathrm{x}/\theta)$ の存在を証明する．つまり，先験的に $\pi(m)$ という m の関数を与えたときに φ が存在するかどうか，また存在するとしてどのような性質を持つのか考察する．差し当たり関数 $\pi(m)$ は，$(0, \infty)$ 上有界で連続微分可能な関数と仮定する．⑿式に代入して両辺に $mx_0\theta_0$ を乗じると

$$h\Big(\frac{mx_0}{\pi(m)\,\theta_0\,\varphi(x_0/\theta_0)}\Big)\frac{mx_0}{\pi(m)\,\theta_0\,\varphi(x_0/\theta_0)}$$

$$=\int V'\Big(\frac{mx_0x}{\pi(mx_0')\,\theta_0\,\varphi(x/\theta)}\Big)\frac{mx_0x}{\pi(mx_0')\,\theta_0\,\varphi(x/\theta)}\,dF_0\Big(x_0', x, \theta \mid \frac{x_0}{\theta_0}\Big) \tag{13}$$

と書ける．条件付き分布で m は所与であるから，$F_0(x_0, x, \theta \mid p)=F_0(x_0, x, \theta \mid x_0/\theta_0)$ とおいた．分布 F_0 が微分可能と仮定しその密度関数を具体的に与える．確率ベクトル (x_0, θ_0) と (x, θ) は i.i.d. であることに注意して $z_0 = x_0/\theta_0$, $z = x/\theta$ とおく．また，z を与えたときの x の確率密度関数を $f_{x|z}(x)$ とし，(θ, z) の密度関数を $f_{z,\theta}(z, \theta)$ とおく．すると⒀式は

$$h\Big(\frac{m}{\pi(m)}\frac{z_0}{\varphi(z_0)}\Big)\frac{m}{\pi(m)}\frac{z_0}{\varphi(z_0)}$$

$$=\int V'\Big(\frac{mz_0}{\pi(mx_0)}\frac{\theta z}{\varphi(z)}\Big)\frac{mz_0}{\pi(mx_0)}\frac{\theta z}{\varphi(z)}f_{x_0|z_0}(x_0)\,dx_0\,f_{z,\theta}(z,\theta)\,dz\,d\theta \tag{14}$$

と簡潔になる．これからこの関数方程式に縮小写像定理を用いて，未知の関数 φ の存在を示す．以下は $\pi(m)=m$ とおいた場合に Lucas (1972) の定理 1 に対応するものである．

定理 3.1　貨幣数量 $m>0$ は固定された定数とする．そのとき関数方程式⒁には連続解

14）これは Lucas-Azariadis equation と呼ばれるものである．

$\varphi(z)$ が $(0, \infty)$ 上で一意的に存在する．ここで $\varphi(z)$ は連続な正値関数であり，$z/\varphi(z)$ は $(0, \infty)$ 上で有界となる．

結果的に φ が存在するためには，関数 $\pi(m)$ が $(0, \infty)$ 上有界で連続微分可能な関数で十分ということになる[15]．ところで，存在が証明された φ は，一般には m に依存することを厳密には証明していない．そのため $\varphi(z; m)$ と書かず単に $\varphi(\cdot)$ おいた[16]．

さて，次に均衡解 $\varphi^*(z)$ を分析することで，物価 p と貨幣供給量 m の関係を明らかにする．我々は物価関数を $p(m, x, \theta) = \pi(m)\varphi(x/\theta)$ とおき，証明中

$$\frac{m}{\pi(m)} \frac{x/\theta}{\varphi(x/\theta)} = G_1(\Psi(x/\theta; \mathrm{m}))$$

とおいたことを思いだそう．すると

$$\varphi(x/\theta; \mathrm{m}) = \frac{m}{\pi(m)} \frac{x/\theta}{G_1(\Psi(x/\theta; \mathrm{m})}$$

より，均衡物価関数は

$$p(m, x, \theta) = \frac{m(x/\theta)}{G_1(\Psi(x/\theta; m)} \tag{15}$$

となり，貨幣供給量 m と，区別できない実物的ショック x/θ の関数として表されることになる．もし仮に，Lucas (1972) の主張する貨幣の中立性が成り立てば，物価を貨幣で偏微分したもの $\partial p/\partial m$ は m に依存しない．言い方を変えれば，$m/p = G_1[\Psi(x/\theta; m)]/(x/\theta)$ の右辺が m と無関係の関数となる．けれども，定理 3.1 の証明を辿れば，関数 $G_1(\Psi(x/\theta; m))$ は m の影響を受ける．

定理 3.2　均衡式(14)で，ある関数 $\pi(m)$ と密度関数 $f_{x|z}$ が存在して，均衡物価関数が貨幣の中立性を満たさない．つまり，一般には均衡において貨幣は中立的とならない．（m/p が定数とはならない．）

これで，Lucas (1972) モデルの均衡物価関数は，一般に貨幣中立的でないことが証明された．とはいえ，その証明ではややアドホックな仮定をおいた．今後の課題として，関数 $\pi(m)$ とショック (x, θ) の従う密度関数 $f_{x,\theta}$ に，経済学的に自然な仮定をおいたときに，貨幣の中立性が成り立つか否かという問いが挙がる．これに対する見通しを与える意味で，貨幣

15）証明を辿れば，実は $\pi(m)$ が連続でありさえすれば十分である．仮定がどこまで緩められるかは今後の課題である．

16）特に φ が m に依存することを直接に使わずとも，均衡物価関数の存在を証明することができる．

が非中立的となる十分条件を整理しておく．本質的なことは，関数 $\pi(m)$ に関する先験的な仮定が，（関数方程式の解として得られる）均衡物価関数で，どのように反映されるかということである．

系 3.1　変数 $z_0 = x_0/\theta_0$ を与えたときの x_0 の条件付き分布を $F_{x_0|z_0}(x_0)$，関連する条件付き期待値を $E_{x_0|z_0}[\cdot]$ と書く．このとき，⒁式の均衡解 $p^*(m, z)$ において，m/p^* が m に依存するためには，$E_{x_0|z_0}$ の台の上で，$(\pi(m)/\pi(mx_0))' \geq 0$（もしくは $(\leq)$）を満たし，さらに $E_{x_0|z_0}[(\pi(m)/\pi(mx_0))'] > 0$（もしくは $(<)$）が成り立つことが十分である．（ここで微分は m に関する偏微分を表す．）

証明は定理 3.2 のそれと同様に背理法を用いればよい．注意したいのは，$F_{x_0|z_0}(x_0)$ の台の上で，$(\pi(m)/\pi(mx_0))'$ の符合が正と負のどちらの値もとり得る場合である．貨幣の中立性は崩れると予想できるが，その証明には π や F に関する仮定だけでなく，h や V' にも追加的な仮定が必要になると思われる．系 3.1 の意味は，'先験的' に貨幣供給量の変化が期待インフレ率（期待物価上昇率）

$$E\Big[\frac{p(m, z_0)}{p(mx_0, z)}\Big] = E\Big[\frac{\pi(m)\varphi(z_0)}{\pi(mx_0)\varphi(z)}\Big] = E_{x_0|z_0}\Big[\frac{\pi(m)}{\pi(mx_0)}\Big]E\Big[\frac{\varphi(z_0)}{\varphi(z)}\Big]$$

に影響を与えると仮定するならば，均衡物価関数において貨幣の中立性は崩れるということである[17]．

今度は貨幣の中立性が満たされないものとして，均衡物価関数 $p(m, x, \theta)$ の貨幣供給量 m に対する反応をみる．我々は $p(m, x, \theta) = \pi(m)\varphi(x/\theta)$ と仮定したので，ここでも $z = x/\theta$ とおいて，均衡物価関数を $p(m, z)$ と 2 変数関数にしておく．まず，均衡物価 φ に表れる $\Psi(z; m)$ を m の関数として分析する．

補題 3.1　複号は同順とし，$m_1 > m_0 > 0$ と仮定する．定理 3.1 の証明の均衡式㉘で，任意の z_0 に対し

$$\int G_2\Big[G_1(\Psi(z; m_0))\frac{\pi(m_1)z_0\theta}{\pi(m_1 x_0)}\Big] f_{x_0|z_0}(x_0)dx_0 f_{z,\theta}(z,\theta)dzd\theta$$

$$\gtrless \int G_2\Big[G_1(\Psi(z; m_0))\frac{\pi(m_0)z_0\theta}{\pi(m_0 x_0)}\Big] f_{x_0|z_0}(x_0)dx_0 f_{z,\theta}(z,\theta)dzd\theta \qquad (16)$$

17）繰り返し述べるが先験的な仮定と，結果として求まる均衡解は異なることに注意が必要である．均衡解では貨幣供給量 m は $\Psi(z; m)$ を通じてインフレ率へ影響を与える．

ならば，任意の z_0 について $\Psi(z_0; m_1) \gtrless \Psi(z_0; m_0)$ が成り立つ．

この補題の仮定を満たす $\pi(m)$ と条件付き密度関数 $f_{x|z}(x)$ が存在することは容易に示せる．例えば $\pi(m)=m/(m+1)$ とすると

$$\frac{\pi'(m)}{\pi(m)}=(\log \pi(m))'=\frac{1}{m(m+1)}$$

だから

$$\left(\frac{\pi(m)}{\pi(mx)}\right)'=\frac{\pi(m)}{\pi(mx)}\left(\frac{\pi'(m)}{\pi(m)}-\frac{\pi'(mx)x}{\pi(mx)}\right)=\frac{x-1}{x(m+1)^2}$$

となり，$x \geq 1$ ならば $(\pi(m)/\pi(mx))' \geq 0$ である．ここで確率変数 x の周辺密度関数 $f_x(x)$ が，$x \geq 1$ に台を持つとすると $f_{x|z}(x)$ も同様で，⒃の不等式（>）の仮定が常に満たされる．もう 1 つ例を挙げる．今度は $(\pi(m)/\pi(mx))'$ が x に関して単調とならない．$\pi(m)=m^2/\{(m-3)^2+2\}$ とおくと，

$$\frac{\pi'(m)}{\pi(m)}=(\log \pi(m))'=\frac{-6m+22}{m\{(m-3)^2+2\}}$$

だから

$$\left(\frac{\pi(m)}{\pi(mx)}\right)'=\frac{(x-1)\{(11m-3m^2)x+11m-33\}}{x^2\{(m-3)+2\}^2} \tag{17}$$

と計算できる．$m=1$ ならば $x=1, 11/4$ で極値をとり，$1 \leq x \leq 11/4$ で⒄は x に関して非増加，それ以外では増加する．従って，$f_x(x)$ が $0<x<1$ と $x>11/4$ に台を持つならば，⒃の仮定が満たされる．$m=4$ ならば前と同様に $x=1, 11/4$ で極値をとるが，今度は逆に $1 \leq x \leq 11/4$ で⒄は非減少となる．つまり⒄は x の関数として m の値に大きく依存する．これは貨幣量の水準自体が，貨幣的なショックへ影響を与えることを意味する．

ここで，補題 3.1 の経済学的な意味を考えてみよう．均衡で関数方程式㉘は

$$\Psi(z_0; m)=\int G_2\left[G_1(\Psi(z; m))\frac{\pi(m)z_0\theta}{\pi(mx_0)}\right]dF(x_0, z, \theta \mid z_0)$$

と書けたことを思いだそう．右辺は貯蓄の期待限界効用を表す．より詳しくは，1 単位の貯蓄（利子率分が加えられたもの）を取り崩して，将来購入されるであろう財から得られる期待限界効用である．この式と⒃式を対応させて考えてみる．すると⒃式は，貨幣供給量を m_0 から m_1 に増加するとき，先験的に（インフレ率に変化を与えると）仮定する量 $(\pi(m)/\pi(mx_0))$ が，貯蓄の限界効用関数を変化させるものとして，その変動の大小関係を表す不等式である．そして補題は，その変動により関数 Ψ の動きが決まることを主張するものである．

さて，本題に戻り，補題 3.1 を用いて我々の主目的であった，均衡物価関数 p と貨幣供給量 m の関係を導く．

定理 3.3 $m_1 > m_0 > 0$ とする．任意の z_0 に対して，式⒃において大小関係を表す不等号 ($\gtreqless$) が成立するならば，任意の z_0 に対して

$$\frac{m_1}{p(m_1, z_0)} \gtreqless \frac{m_0}{p(m_0, z_0)}$$

となる．ここで複号は同順とした．
証明は，補題 3.1 の結果を定義式

$$\frac{m}{p(m, z)} = \frac{G_1(\Psi(z, m))}{z}$$

に適用すればよい．この定理 3.3 と系 3.1 のすぐ下の議論より，ただちに次のことがわかる．

系 3.2 物価関数が先験的に $p(m, z) = \pi(m)\,\varphi(z)$ と書けるものと仮定する．この系では不等号は複号同順とする．このとき

$$\left(\frac{\pi(m)}{\pi(mx)}\right)' \gtreqless 0$$

が，条件付き密度関数 $f_{x_0|z_0}(x_0)$ の定義域で成立し，さらに $E[(\pi(m)/\pi(mx_0))' \mid z_0] \gtreqless 0$ ならば，実質貨幣残高は一定でなくなり，$m_1 > m_0 > 0$ に対し

$$\frac{m_1}{p(m_1, z_0)} \gtreqless \frac{m_0}{p(m_0, z_0)}$$

となる[18)]．

証明は，補題 3.1 の式⒃で，G_2 が増加関数であることを用いればよい．すると定理 3.3 を経て結論に至る．

ここまでの議論をまとめる．均衡で貨幣供給量を増大するとき，実質貨幣残高の変化は，増と減もしくは一定のいずれもあり得る．そしてその変化が一定でなくなるのは，m が予め仮定する関数 $\pi(m)$ を通じて，期待限界効用関数に影響を与える場合である．このとき貨幣は確実に非中立的となる．

今度は得られた均衡物価関数を用いて，貨幣供給量と現在の物価水準の関係を考察する．経済における変動 (x, θ) は一定値をとる局外母数とする．今仮に，貨幣供給量を m_0 から

18) このような均衡価格関数が存在することは，定理 3.1 により関数 φ の存在が証明されることから分かる．

m_1へ増加（$m_1>m_0>0$）したとしよう．定理3.3より直ちに分かるのは，貯蓄による将来の期待限界効用が低下（式⒃で不等式（<）が成立）するならば，実質貨幣残高は減少し，また同時に物価水準は上昇する．これは

$$\frac{m_1}{m_0}<\frac{p(m_1,x,\theta)}{p(m_0,x,\theta)}$$

の関係式に見て取れる．将来財c_1の消費からの効用が少なくなるため，若者世代では，労働供給量を低下（$n\downarrow$）させるとともに，現在の消費を増やし（$c_0\uparrow$），実質貨幣需要を低下（$p/m\downarrow$）させる．老年世代の消費（$c_1\downarrow$）は減る．しかしその減り方は，労働供給の低下程大きくはない．従って物価水準は上昇する．一方で，期待限界効用が上昇する場合，若者は労働供給量を増やし（$n\uparrow$），財の消費を控える（$c_0\downarrow$）．そして老年世代には，増やした貯蓄分だけ消費を増やす（$c_1\uparrow$）．均衡での物価水準は，老年世代の消費c_1と生産量nによるので一方向には決まらない．定理3.3から導かれる不等式も

$$\frac{m_1}{m_0}>\frac{p(m_1,x,\theta)}{p(m_0,x,\theta)}$$

とインフレ率を上から押さえるだけで，物価水準の変化は分からない．注意したいのは，いずれの場合も，mの変化に対する$p(m,x,\theta)$の反応がmと比例的ではないということである．この均衡物価pにおけるmの反応のずれは，貨幣それ自体が様々な波及経路を通して，実体経済へ影響を及ぼすからだと考えることができる．

最後にChiappori and Guesnerie (1990, 1992)との関連で本論文の意義を明確にする．まず，本論文では先行研究より一般の設定（Lucas (1972)のオリジナルなモデルの設定）のもとで，貨幣が非中立的となる均衡解が連続的に存在することを示した．そしてその証明方法は先行研究とは異なり，関数方程式の特徴から均衡解が貨幣非中立的な性質を持つことを示すものである．従って解の形を具体的に特定する必要はない．しかしながら我々の設定では，$p(m,z)=\pi(m)\varphi(z)$とおくことで，貨幣mとショックzの関数を分けていることに注意が必要である. Chiappori and Guesnerie (1990, 1992)では物価関数は$p(m,z)=\psi(m,z)$とされ，mとzの2次関数としての非線形関係を仮定している．これは我々の結果が，完全に先行研究を含むものでないことを意味する．つまり，我々の研究と彼らの研究には，重なる部分もあるが異なる部分もある．このことは，両者はLucas (1972)モデルにおいて貨幣の非中立性を考える際に，補完的な関係にあることを意味する．

Ⅳ．金融政策の効果

前章で考えたモデルの均衡において，金融政策（貨幣供給量の増減）が実体経済へ与える影響を考察する．ただし，読者はあくまで「Lucas（1972）モデル」におけるストーリーであることに注意されたい．均衡条件を与える⒁式を

$$h\left(\frac{m}{\pi(m)}\frac{z_0}{\varphi(z_0;m)}\right)$$

$$=\int V'\left(\frac{mz_0}{\pi(mx_0)}\frac{\theta z}{\varphi(z;m)}\right)\frac{\pi(m)\varphi(z_0;m)\theta z}{\pi(mx_0)\varphi(z;m)}f_{x_0|z_0}(x_0)dx_0 f_{z,\theta}(z,\theta)dzd\theta \tag{18}$$

の形にしておく．均衡では φ は m に依存するので $\varphi(\cdot;m)$ と書いた．右辺は⑾式と対比すると基準化（p を両辺に掛けた）された貯蓄の期待限界効用と解釈できる．なお，最低限の仮定として，均衡物価関数 $p(m,x,\theta)$ は貨幣供給量 m の増加関数とする．言い換えれば，貨幣供給量を増加（拡張的金融政策）すると，物価が必ず上昇するものとする[19)]．考察にあたり注意すべきは以下の2点である．まず，右辺の積分の中にある変数 (x_0,z,θ) は，積分されるべきもので，固定された変数ではない．また関数 φ の中で m を動かすと，それはショック z に依存するため，z と無関係に m による変化を分析できない．関数 $\pi(mx_0)$ においても m の変化は x_0 に依存する．

1．金融政策と雇用の関係

本節では，金融政策の雇用に対する効果をみる．ただし，我々は予見可能な供給量 m と貨幣的ショック x の分布を操作することを以て金融政策とする．なお，均衡が貨幣中立的な場合には，m は実体経済に影響を与えないため政策変数は x のみである．そのような場合は，Lucas（1972）の6, 7章で十分に解説されているため，本節ではそれ以外，つまり実質貨幣残高（貯蓄 m/p）が増減する場合を扱う．ここで先回りして結論を述べておくと，この経済では将来への期待が重要となり，その期待の表れとして現在の個人の行動（雇用と消費）が決まることになる．

それでは，具体的な分析に移ろう．一般性を失うことなく若者の割合が $\theta/2$ の経済圏を考える．この経済では，貨幣供給量の増加（$m\uparrow$）の実体経済への波及経路は3つあり，⒅式を用いて説明する．それは現在の所得と将来の所得（実質）

$$\frac{m}{p(m,z_0)}=\frac{m}{\pi(m)\varphi(z_0;m)}, \tag{19}$$

19)「Lucas（1972）モデル」では，供給量の増加に伴い物価が下落する均衡が存在するかどうか分からない．

$$\frac{m}{p(mx_0, z)} = \frac{m}{\pi(mx_0)\,\varphi(z; m)} \tag{20}$$

を通じた経路（ただし，x_0 と z は確率変数であることに注意）とインフレ率

$$\frac{p(m, z_0)}{p(mx_0, z)} = \frac{\pi\,(m)\,\varphi\,(z_0; m)}{\pi\,(mx_0)\,\varphi\,(z; m)} \tag{21}$$

を通じた経路である．これらの変数を通じた期待形成（⒅式）の変化みる．その際⒅式では等式が成り立つので，⒆式と㉑式の変化が分かれば，⒆式の変動が決まることに注意する．

まず，⒇が期待の意味で増加する場合は，限界効用 V' が減少関数なので，（$V'\downarrow$ となり）右辺の期待限界効用を減少させる可能性が高い．逆に，将来の所得が減少すると予測できる場合は，右辺を増加させる可能性が高い．次にインフレ率（㉑式）の期待形成への影響をみる．こちらの方は単純で，インフレ期待（貨幣の価値が下落する期待）が高まれば，右辺の期待限界効用は減少する．またデフレ期待が高まれば，期待限界効用は増加する．このようにして，将来の財を通して得られる貯蓄の限界効用の変化は，所得効果とインフレ率による変化の両方から決まることがわかる[20]．

さて今度は，この期待の意味での限界効用の変化が，現在の経済へ及ぼす影響を分析する．関数 $h(\cdot)$ は増加であったことに注意されたい．

(a)．貯蓄の期待限界効用が増大する場合（現在の実質貨幣残高 m/p が増大する）．

老人は所得が増え，その分消費を増やす（$c_2\uparrow$）．若者は貨幣供給量が増えたことで，将来の消費の期待限界効用が上昇することを受けて貯蓄を増やす．すなわち，現在財の消費を減らす（$c_1\downarrow$）とともに労働供給量を増やし（$n\uparrow$）（働き）せっせと貯蓄する．そして（現在の消費と比べ同じ効用を得る上で割安になった）老人世代での消費を増やす．

(b)．貯蓄の期待限界効用が減少する場合（現在の実質貨幣残高 m/p が減少する）．

老年世代は実質所得が減るので，消費を減少せざるを得ない（$c_2\downarrow$）．また，若者は将来の消費が，同じ効用を得る上で割高になることを受けて，現在の消費を増やし（$c_1\uparrow$），余暇を楽しむ（$n\downarrow$）ことでより大きな効用を得ようとする．平たく言えば，若いときに人生を謳歌してしまおうと考える．以上が貨幣供給量増加の影響を分析した結果である．

まとまめると，予見できる金融政策において一番重要なのは，人々の将来に対する期待であり，金融政策の効果は，如何にして人々の期待を変化させるかにかかっている．将来消費の期待限界効用が増大するだろうと人々が考えれば，雇用は増加する．逆に将来消費の期待限界効用が減少すると予測すれば，雇用は減少する．

20）これらの効果を通じた影響を詳しくみるためには，V' と h を具体的に決める必要がある．更に互いの効果の大小関係を，特定しなければならない．ここでは深入りせずに影響の経路を述べるに止めた．結果的には期待限界効用の変化は定理 3.3 の形で与えられる．

A　補論

定理 3.1 の証明

証明には，効用関数 V の性質から導かれる不等式

$$V''(\mathrm{c})\mathrm{c} + V'(\mathrm{c}) > 0, \tag{22}$$

$$\frac{\mathrm{c}V'(\mathrm{c})}{V''(\mathrm{c})} \leq -\mathrm{a} < 0,\ 0 < \mathrm{a} < 1 \tag{23}$$

を用いる．まず関数を定義することで(14)式をより扱い易い形に書く．(14)式を

$$\Psi(z;m) = h\left(\frac{mz}{\pi(m)\varphi(z)}\right)\frac{mz}{\pi(m)\varphi(z)}$$

とおき，関数 G_1 を $h(x)x$ の逆関数と定義する．すると

$$\frac{mz}{\pi(m)\varphi(z)} = G_1(\Psi(z))$$

となる．関数 $G_1(x)$ は $x > 0$ で正値をとり以下を満たす．

$$\lim_{x\to 0} G_1(x) = 0, \tag{24}$$

$$0 \leq \frac{xG_1'(x)}{G_1(x)} < 1, \quad x > 0. \tag{25}$$

(24)は h の定義より従い，(25)は $G_1(h(x)x) = x$ を両辺微分し，最終的に

$$0 < \frac{h(x)xG_1'(h(x)x)}{G_1(h(x)x)} = \frac{1}{1 + x\dfrac{h'(x)}{h(x)}} < 1 \tag{26}$$

の形を得ることから分かる．また，$G_2(x) = V'(x)x$ とおく．$x > 0$ で $G_2(x) > 0$ であり，仮定された不等式(22)と(23)より

$$0 < \frac{xG_2'(x)}{G_2(x)} \leq 1 - a < 1, \quad x > 0. \tag{27}$$

さて，以上のように定義した関数Φ，G_1 と G_2 を用いて(13)は

$$\Psi(z_0;m) = \int G_2\left[G_1(\Psi(z;m))\frac{\pi(m)z_0\theta}{\pi(mx_0)}\right] f_{x_0|z_0}(x_0)\,dx_0 f_{z,\theta}(z,\theta)\,dz d\theta \tag{28}$$

と書ける．右辺の積分が存在するような密度関数 $f_{x_0|z_0}$ と $f_{z,\theta}$ を仮定するものとする．その上で縮小写像定理を用いて，(28)に解が存在することを証明する．まず，空間 S を $(-\infty, \infty)$ 上に値をとる有界連続関数の空間とし，そのノルムを

$$\|f\| = \sup_z |f(z)|$$

とおく．S は Banach 空間である．さらに写像 $T : S \to S$ を

$$Tf = \log \int G_2\Big[G_1(e^{f(z)})\frac{\pi(m)z_0\theta}{\pi(mx_0)}\Big] f_{x_0|z_0}(x_0)f_{z,\theta}(z,\theta)\,dx_0\,d\theta\,dz$$

と定義する．積分が存在することからこの写像は well-defined となる．写像 T は(28)より

$$\log\Psi = T\log\Psi$$

を満たすことが分かるから，縮小写像であることを確認すれば良い．つまり任意の $f, g \in S$ に対して

$$\|Tf - Tg\| \leq (1-a)\|f-g\|, \quad 0<a<1$$

を示す．まず

$$\|Tf - Tg\| = \sup_{z_0}\Big|\log\int w(x_0, z_0, z, \theta)\frac{G_2[G_1(e^{f(z)})\frac{\pi(m)z_0\theta}{\pi(mx_0)}]}{G_2[G_1(e^{g(z)})\frac{\pi(m)z_0\theta}{\pi(mx_0)}]}dx_0dzd\theta\Big|$$

と変形しておく．ここで

$$w(x_0, z_0, z, \theta) = \Big[\int G_2 f_{x_0|z_0}(x_0)f_{z,\theta}(z,\theta)\,dx_0\,d\theta\,dz\Big]^{-1}\big[G_2 f_{x_0|z_0}(x_0)f_{z,\theta}(z,\theta)\big] \tag{29}$$

となる．さらに $\int w dx_0 d\theta dz = 1$ と $w(x_0, z_0, z, \theta) > 0$ より

$$\begin{aligned}\|Tf - Tg\| &= \sup_{z_0}\Big|\log\int w(x_0, z_0, z, \theta)\frac{G_2[G_1(e^{f(z)})\frac{\pi(m)z_0\theta}{\pi(mx_0)}]}{G_2[G_1(e^{g(z)})\frac{\pi(m)z_0\theta}{\pi(mx_0)}]}dx_0dzd\theta\Big| \\ &\leq \sup_{z_0}\sup_{x_0(z_0),z,\theta}\Big|\log\Big[\frac{G_2[G_1(e^{f(z)})\frac{\pi(m)z_0\theta}{\pi(mx_0)}]}{G_2[G_1(e^{g(z)})\frac{\pi(m)z_0\theta}{\pi(mx_0)}]}\int w(x_0, z_0, z, \theta)dx_0dzd\theta\Big]\Big| \\ &\leq \sup_{z_0}\sup_{x_0(z_0),z,\theta}\Big|\log G_2\Big[G_1(e^{f(z)})\frac{\pi(m)z_0\theta}{\pi(mx_0)}\Big] - \log G_2\Big[G_1(e^{g(z)})\frac{\pi(m)z_0\theta}{\pi(mx_0)}\Big]\Big|\end{aligned}$$

となる．ここで中間値の定理を用いるため，偏微分

$$\frac{\partial}{\partial y}\log G_2\Big[G_1(e^y)\frac{\pi(m)z_0\theta}{\pi(mx_0)}\Big] = \Big[\frac{G_1(e^y)\frac{\pi(m)z_0\theta}{\pi(mx_0)}G'_2[G_1(e^y)\frac{\pi(m)z_0\theta}{\pi(mx_0)}]}{G_2[G_1(e^y)\frac{\pi(m)z_0\theta}{\pi(mx_0)}]}\Big]\Big[\frac{e^yG'_1(e^y)}{G_1(e^y)}\Big]$$

を計算すると，(26)と(27)より任意の (x_0, z_0, z, θ) と y に対して

$$\sup_{z_0}\sup_{x_0(z_0),z,\theta}\frac{\partial}{\partial y}\log G_2\Big[G_1(e^y)\frac{\pi(m)z_0\theta}{\pi(mx_0)}\Big] < 1-a$$

となる．この不等式を中間値の定理と組合わせて

$$\|Tf - Tg\| \leq \sup_{z_0}\sup_{x_0,z,\theta,p}\Big|\frac{\partial}{\partial y}\log G_2\Big[G_1(e^y)\frac{\pi(m)z_0\theta}{\pi(mx_0)}\Big]\Big|_{y=pf(z)+(1-p)g(z)}|f(z)-g(z)|$$

$$\leq \sup_{z_0} \sup_{x_0, z, \theta, p} \left| \frac{\partial}{\partial y} \log G_2\left[G_1(e^y) \frac{\pi(m) z_0 \theta}{\pi(m x_0)} \right] \right|_{y=pf(z)+(1-p)g(z)} \sup_z |f(z)-g(z)|$$

$$\leq (1-a)\| f-g \|$$

となり，縮小写像であることが示される．従って，（例えば(Stokey and Lucas, (1989), Theorem 3.2)）の縮小写像定理を用いて $Tf=f$ は有界連続な解 f^* を一意的に持つ．そして $\Psi(z;\, m) = e^{f^*(z)}$ とおけば，求める結果が得られる[21]．後は $\varphi(z;\, m) = z / G_1(\Psi(z;\, m)) \dfrac{m}{\pi(m)}$ とおけばよい． □

定理 3.2 の証明

定理 3.1 の証明のものと同様の記号を用いる．関数 G_1 は単調増加であったから $\Psi(m, z)$ が m に依存することを証明すれば十分である．背理法を用いる．任意の z と m に対して

$$\frac{\partial \Psi(z;\, m)}{\partial m} = 0$$

を仮定して，このとき均衡式(28)から矛盾が導かれることを示す．仮定のもとで，均衡式(28)の両辺を m で偏微分すると

$$0 = \int G_2'\left[G_1(\Psi(z; m)) \frac{\pi(m) z_0 \theta}{\pi(m x_0)} \right] G_1(\Psi(z;\, m)) \left(\frac{\pi(m)}{\pi(m x_0)} \right)' z_0 \theta f_{x_0|z_0}(x_0) dx_0 f_{z,\theta}(z, \theta) dz d\theta \tag{30}$$

となる．ここで $(\cdot)'$ は m に関する 1 階の微分を表し，また微分と積分の交換にはルベーグの支配収束定理を用いた．上の被積分関数は，(27)式より上から

$$G_2 \cdot \frac{G_2'}{G_2} \cdot G_1(\Psi(z; m)) \frac{\pi(m) z_0 \theta}{\pi(m x_0)} \cdot \left(\frac{\pi(m)}{\pi(m x_0)} \right)' \Big/ \left(\frac{\pi(m)}{\pi(m x_0)} \right) f_{x_0|z_0}(x_0) f_{z,\theta}(z, \theta)$$

$$\leq (1-a) \left| \left(\frac{\pi(m)}{\pi(m x_0)} \right)' \Big/ \left(\frac{\pi(m)}{\pi(m x_0)} \right) \right| G_2 \cdot f_{x_0|z_0}(x_0) f_{z,\theta}(z, \theta)$$

と押さえられる．π が $(0,\infty)$ 上で，連続微分可能なことを用いれば，$\left(\frac{\pi(m)}{\pi(mx)}\right)' / \left(\frac{\pi(m)}{\pi(mx)}\right)$ は x の関数として有界（$f_{x|z}(x)$ の台は $(0,\infty)$ より）となり，ルベーグの支配収束定理を用いることができる．

さて，(30)式に戻り，右辺の被積分関数をみてみよう．(22)式より，$G_2' > 0$ で，G_1 と π は正の値をとるから，$(\pi(m)/\pi(mx))'$ が x の分布の定義域で正であれば，右辺の積分は正の値をとる．従って背理法の矛盾が示せる．

21）後に証明するが一般に $f^*(z)$ は m に依存していることに注意が必要である．

ところが実は，上の性質を満たす $\pi(m)$ と $f_{x|z}(x)$ の組合わせは無数に考えられる．例えば，$(\pi(m)/\pi(mx))'$が，x の関数として，非減少で負と正の両方の値をとるとする[22]．密度関数 $f_{x|z}$ には連続関数以外の仮定はなされていないので，$(\pi(m)/\pi(mx))'>0$ となる x の値のみに台を持つように構成できる．それゆえ，背理法の矛盾が示せたことになる．□

補題 3.1 の証明

証明中の記号はすべて，定理 3.1 のそれと同じものとする．⒃の不等式において（> 0）の不等号が成立しているものとする．このとき均衡解において

$$\min_{z_0}(\log\Psi(z_0;m_1)-\log\Psi(z_0;m_0)):=l<0$$

を仮定して矛盾を示す．⒃式の右辺から左辺を引いたものを $J_1>0$ とする．また

$$\begin{aligned}&\overline{w}(x_0,z_0,z,\theta)\\&=\left[\int G_2\left[G_1(\Psi(z;m_0))\frac{\pi(m_1)z_0\theta}{m_1x_0}\right]f_{x_0|z_0}(x_0)f_{z,\theta}(z,\theta)dx_0d\theta dz\right]^{-1}\\&\quad\times\left[G_2\left[G_1(\Psi(z;m_0))\frac{\pi(m_1)z_0\theta}{m_1x_0}\right]f_{x_0|z_0}(x_0)f_{z,\theta}(z,\theta)\right]\end{aligned}$$

と定義しておく．任意の z_0 に対して以下が成り立つ．

$$\begin{aligned}&0>\log\Psi(z_0;m_1)-\log\Psi(z_0;m_0)\\&=\log\int G_2\left[G_1(\Psi(z;m_1))\frac{\pi(m_1)z_0\theta}{\pi(m_1x_0)}\right]f_{x_0|z_0}(x_0)dx_0f_{z,\theta}(z,\theta)dzd\theta\\&\quad-\log\int G_2\left[G_1(\Psi(z;m_0))\frac{\pi(m_1)z_0\theta}{\pi(m_1x_0)}\right]f_{x_0|z_0}(x_0)dx_0f_{z,\theta}(z,\theta)dzd\theta\\&\quad+\log\int G_2\left[G_1(\Psi(z;m_0))\frac{\pi(m_1)z_0\theta}{\pi(m_1x_0)}\right]f_{x_0|z_0}(x_0)dx_0f_{z,\theta}(z,\theta)dzd\theta\\&\quad-\log\int G_2\left[G_1(\Psi(z;m_0))\frac{\pi(m_0)z_0\theta}{\pi(m_0x_0)}\right]f_{x_0|z_0}(x_0)dx_0f_{z,\theta}(z,\theta)dzd\theta\\&=\log\int\overline{w}(x_0,z_0,z,\theta)\ \frac{G_2[G_1(\Psi(z;m_1))\frac{\pi(m_1)z_0\theta}{\pi(m_1x_0)}]}{G_2[G_1(\Psi(z;m_0))\frac{\pi(m_1)z_0\theta}{\pi(m_1x_0)}]}dx_0dzd\theta+J_1\\&\geq\log\left(\min_{z_0}\min_{x_0(z_0),z,\theta}\frac{G_2[G_1(\Psi(z;m_1))\frac{\pi(m_1)z_0\theta}{\pi(m_1x_0)}]}{G_2[G_1(\Psi(z;m_0))\frac{\pi(m_1)z_0\theta}{\pi(m_1x_0)}]}\right)+J_1\\&=\min_{z_0}\min_{x_0(z_0),z,\theta}\log\left(\frac{G_2[G_1(\Psi(z;m_1))\frac{\pi(m_1)z_0\theta}{\pi(m_1x_0)}]}{G_2[G_1(\Psi(z;m_0))\frac{\pi(m_1)z_0\theta}{\pi(m_1x_0)}]}\right)+J_1\end{aligned}$$

22）具体例は 10 ページの $\pi(m)=m/(m+1)$ となる．

$$
\begin{aligned}
&\geq (1-a)\min_{z_0}\min_{x_0(z_0),z,\theta}\ (\log\Psi(z;m_1)-(\log\Psi(z;m_0))+J_1\\
&= (1-a)l+J_1
\end{aligned}
$$

と計算できる．最後から 2 番目の不等式を導くにあたって，定理 3.1 の証明と同様に

$$
\log G_2\Big[G_1(e^x)\frac{\pi(m_1)z_0\theta}{\pi(m_1x_0)}\Big]
$$

に中間値の定理を用いた．左辺で z_0 について最小化すると，$al\geq J_1>0$ となり矛盾が示せた．逆向きの不等号（<）が成り立つ場合も同様に示せる． □

参考文献

大瀧雅之，『景気循環の理論：現代日本経済の構造』，東京大学出版会，1994.

大瀧雅之，『貨幣・雇用理論の基礎』，勁草書房，2011.

P. A. Chiappori and R. Guesnerie, Anticipations, indétermination et non-neutralité de la monnaie, *Annales d'Economie et de Statistiques*, **19**, (1990), 1-25.

P. A. Chiappori and R. Guesnerie, The Lucas equation, indeterminancy, and non-neutrality: an example, In *Economic Analysis of Markets and Games* edited by P. Dasgupta, D. Gale, O. Hart and E. Maskin, The MIT Press, Cambridge, 1992, 445-464.

H. Lang, Expectations and the neutrality of money: a comment, *J.Econ.Theory*, **36**, (1985), 392-393.

R. E. Lucas, Jr, Expectations and the neutrality of money, *J.Econ.Theory*, **4**, (1972), 103-124.

R. E. Lucas, Jr, Corrigendum on "Expectations and the neutrality of money", *J.Econ.Theory*, **31**, (1983), 197-199.

M. Otaki, A pure theory of aggregate price determination, *DBJ Discussion Paper Series, No. 0906*, (2010).

N. L. Stokey and R. E. Lucas, Jr, with E. C. Prescott, *Recursive Methods in Economic Dynamics*, Harvard Univ. Press, Massachusetts, 1989.